

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

NGUYỄN THIỆU HUY, BÙI XUÂN DIỆU, ĐÀO TUẤN ANH



GIẢI TÍCH III

CHUỖI VÔ HẠN VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
Bài giảng dành cho sinh viên các ngành kỹ thuật

NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA HÀ NỘI

GIẢI TÍCH III

(CHUỖI VÔ HẠN VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN)

NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA HÀ NỘI
Ngõ 17 Tạ Quang Bửu – Hai Bà Trưng – Hà Nội
ĐT: 024. 38684569; Fax: 024. 38684570
<https://nxbbk.hust.edu.vn>

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng Biên tập: TS. BÙI ĐỨC HÙNG

Biên tập: TRẦN THỊ PHƯƠNG
Sửa bản in: NGUYỄN THIỆU HUY
Trình bày bìa: DƯƠNG HOÀNG ANH

In 3.000 cuốn khổ (16 × 24) cm tại Công ty In Giao thông, Chi nhánh Công ty TNHH MTV Giao thông vận tải, số 80B Trần Hưng Đạo, quận Hoàn Kiếm, Hà Nội.
Số xuất bản: 539 – 2022/CXBIPH/01 – 11/BKHN; ISBN: 978-604-316-621-7.
Số QĐXB: 07/QĐ – ĐHBK – BKHN ngày 7/3/2022.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2022.

Biên mục trên xuất bản phẩm của Thư viện Quốc gia Việt Nam

Nguyễn Thiệu Huy

Giải tích III : Chuỗi vô hạn và phương trình vi phân / Nguyễn Thiệu Huy, Bùi Xuân Diệu, Đào Tuấn Anh. - H. : Bách khoa Hà Nội, 2022. - 152 tr. : hình vẽ, bảng ; 24 cm
Thư mục : tr. 143

1. Giải tích 2. Phương trình vi phân 3. Chuỗi vô hạn
515.243 - dc23

BKH0128p-CIP

LỜI MỞ ĐẦU

Cuốn sách này dành cho sinh viên các ngành kỹ thuật và những bạn đọc cần đến kiến thức về phương trình vi phân và chuỗi vô hạn để áp dụng trong các chuyên ngành của mình. Cuốn sách bao gồm kỹ thuật giải và ứng dụng của phương trình vi phân và chuỗi vô hạn. Nhiều định luật và các vấn đề của khoa học kỹ thuật và đời sống tự nhiên xuất hiện trong toán học dưới dạng phương trình vi phân, các phương trình như vậy có tầm quan trọng mang tính nền tảng trong khoa học kỹ thuật và ứng dụng thực tế. Vì vậy, mục tiêu chính của cuốn sách này là giúp sinh viên làm quen với các mô hình vật lý và ứng dụng khác nhau dẫn đến một số lớp phương trình vi phân và cung cấp cho sinh viên các phương pháp tiêu chuẩn quan trọng để giải các phương trình vi phân đó. Cùng với đó, cuốn sách cũng cung cấp những kiến thức cơ bản và kỹ năng tính toán đánh giá tính hội tụ hay phân kỳ đối với các chuỗi số và chuỗi hàm số và ứng dụng trong các vấn đề liên quan đến xấp xỉ hàm và phân rã hàm thành phổ rời rạc (Fourier), vốn đóng vai trò quan trọng trong các bài toán kỹ thuật.

Trong quá trình biên soạn, nhóm tác giả đã tích hợp đầy đủ các modules kiến thức trong đề cương môn Giải tích III đã thống nhất của Viện Toán ứng dụng và Tin học. Ngoài ra, để mở rộng và nâng cao một số kỹ năng và làm phong phú thêm kiến thức của người đọc, chúng tôi đã đưa thêm một số nội dung kiến thức nằm ngoài đề cương, các kiến thức này được đưa vào phần đọc thêm. Chúng tôi quan niệm rằng, người học luôn cần có sự tò mò khoa học để hoàn thiện và phát triển các kiến thức của mình trong một thế giới rộng lớn, không thuần nhất và đầy biến động như hiện nay.

Để giúp người học thực hành và củng cố các kiến thức lý thuyết và kỹ năng tính toán của mình, sau mỗi chương, chúng tôi đưa ra các bài tập luyện tập có đáp số và hướng dẫn giải ở cuối sách. Hơn nữa, chúng tôi cũng cung cấp một số đề thi môn Giải tích III các năm qua của Viện Toán ứng dụng và Tin học để người học có thể làm quen với dạng thức đề thi giữa kỳ và cuối kỳ của môn học theo từng nhóm ngành.

Nhóm tác giả rất mong muốn nhận được các góp ý quý giá từ bạn đọc để cuốn sách ngày càng được hoàn thiện hơn trong các lần xuất bản sau. Các nhận xét và góp ý xin gửi về email: huy.nguyenthieu@hust.edu.vn.

Các tác giả:

Nguyễn Thiệu Huy • Bùi Xuân Diệu • Đào Tuấn Anh

CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{N}$	Tập các số tự nhiên
$\mathbb{N}^*$	Tập các số tự nhiên khác 0
$\mathbb{Z}$	Tập các số nguyên
$\mathbb{Q}$	Tập các số hữu tỉ
$\mathbb{R}$	Tập các số thực
$\mathbb{R}_+$	Tập các số thực không âm
PTVP	Phương trình vi phân
TPSR	Tích phân suy rộng
VCB	Vô cùng bé
VCL	Vô cùng lớn
$\sum a_n x^n$	Chuỗi lũy thừa đối với biến x
$\mathcal{L}$	Phép biến đổi Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	Phép biến đổi Laplace ngược

Mục lục

Lời mở đầu	i
Các ký hiệu	ii
Mục lục	iii
1 Chuỗi số	1
1 Các khái niệm cơ bản về chuỗi số	1
2 Chuỗi số dương	4
1.2.1 Các tiêu chuẩn so sánh	4
1.2.2 Tiêu chuẩn D'Alembert	10
1.2.3 Tiêu chuẩn Cauchy	12
1.2.4 Tiêu chuẩn tích phân	13
3 Chuỗi số với số hạng có dấu bất kỳ	15
1.3.1 Hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ	15
1.3.2 Chuỗi đan dấu	17
1.3.3 Tính chất của chuỗi số hội tụ tuyệt đối hoặc bán hội tụ	18
1.3.4 Phép nhân chuỗi	19
1.3.5 Phần đọc thêm: Các tiêu chuẩn Dirichlet, Abel, Raabe, Bertrand	20
4 Bài tập chương 1	24
2 Chuỗi hàm số	28
1 Khái niệm cơ bản về chuỗi hàm số, sự hội tụ, hội tụ đều	28
2.1.1 Chuỗi hàm số và miền hội tụ	28
2.1.2 Chuỗi hàm số hội tụ đều	29
2.1.3 Các tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều	31
2 Chuỗi lũy thừa	34
2.2.1 Các khái niệm cơ bản về chuỗi lũy thừa	34
2.2.2 Bán kính hội tụ và khoảng hội tụ	34
2.2.3 Các tính chất của chuỗi lũy thừa	36
2.2.4 Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa	38
2.2.5 Một số khai triển thành chuỗi Maclaurin của hàm sơ cấp cơ bản	40
2.2.6 Áp dụng: Tính gần đúng giá trị của hàm và tích phân	40
3 Chuỗi Lượng giác và Chuỗi Fourier	41
2.3.1 Hàm tuần hoàn, hàm liên tục từng khúc, chuỗi lượng giác	41
2.3.2 Khai triển hàm thành chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier	43

2.3.3	Khai triển Fourier của hàm xác định trên (a, b)	47
4	Bài tập chương 2	49
3	Dẫn nhập về phương trình vi phân, phương trình vi phân cấp một	51
1	Bài toán thực tế và một số khái niệm cơ bản của phương trình vi phân	51
3.1.1	Bài toán vật rơi	51
3.1.2	Mạch điện	52
3.1.3	Mô hình quần thể thú – mồi	52
3.1.4	Khái niệm cơ bản	53
2	Phương trình vi phân cấp một	55
3.2.1	Dạng tiêu chuẩn và dạng vi phân của phương trình vi phân cấp một	55
3.2.2	Các phương trình vi phân khuyết	57
3.2.3	Phương trình vi phân biến số phân ly	58
3.2.4	Phương trình vi phân thuần nhất (đẳng cấp)	58
3.2.5	Phương trình vi phân tuyến tính	59
3.2.6	Phương trình vi phân Bernoulli	60
3.2.7	Phương trình vi phân toàn phần	61
3.2.8	Thừa số tích phân	61
3.2.9	Phần đọc thêm: Ứng dụng vào mô hình thú – mồi	63
3	Bài tập chương 3	64
4	Phương trình vi phân cấp hai	66
1	Đại cương về phương trình vi phân cấp hai	66
2	Các phương trình khuyết	68
4.2.1	Phương trình khuyết $y : F(x, y', y'') = 0$	68
4.2.2	Phương trình khuyết y và $y' : F(x, y'') = 0$	69
4.2.3	Phương trình khuyết $x : F(y, y', y'') = 0$	69
3	Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai	70
4.3.1	Phương trình thuần nhất	70
4.3.2	Phương trình không thuần nhất	73
4	Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng	74
4.4.1	Phương trình thuần nhất	74
4.4.2	Phương trình không thuần nhất	75
4.4.3	Phương trình Euler	78
5	Hệ phương trình vi phân cấp một	79
4.5.1	Đại cương về hệ phương trình vi phân cấp một	79
4.5.2	Phương pháp khử giải hệ phương trình vi phân cấp một	80
6	Bài tập chương 4	81
5	Phương pháp toán tử Laplace	83
1	Phép biến đổi Laplace và biến đổi ngược	83
5.1.1	Phép biến đổi Laplace	83
5.1.2	Biến đổi Laplace ngược	86

2	Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu	87
5.2.1	Biến đổi Laplace của đạo hàm	87
5.2.2	Áp dụng giải bài toán với giá trị ban đầu	88
5.2.3	Biến đổi Laplace của tích phân	89
3	Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản	91
5.3.1	Phép tịnh tiến theo biến s	91
5.3.2	Biến đổi phân thức đơn giản $\frac{P(s)}{Q(s)}$	91
5.3.3	Áp dụng giải phương trình vi phân tuyến tính cấp cao với hệ số hằng	92
5.3.4	Phép tịnh tiến theo biến t	93
4	Đạo hàm, tích phân và tích chập	94
5.4.1	Tích chập của hai hàm số	94
5.4.2	Đạo hàm, tích phân của biến đổi Laplace	95
5.4.3	Bảng tóm tắt các tính chất của phép biến đổi Laplace	98
5.4.4	Phần đọc thêm: Các kỹ thuật biến đổi Laplace bổ sung	98
5	Bài tập chương 5	101
	Một số đề thi tham khảo	103
	Gợi ý và đáp án cho các bài tập	129
	Tài liệu tham khảo	144

CHƯƠNG 1

Chuỗi số

Những nhà sáng lập đầu tiên của phép tính vi phân, bao gồm Newton và Leibniz, đã nhận thức rõ tầm quan trọng của chuỗi vô hạn. Các giá trị chính xác của nhiều hàm như sin và cosin chỉ có thể đạt được trong những trường hợp đặc biệt. Các chuỗi vô hạn cung cấp một công cụ để tính xấp xỉ bất kỳ một giá trị nào của các hàm đó với độ sai số bé tùy ý. Trong chương này, chúng ta sẽ bắt đầu bằng các khái niệm về chuỗi vô hạn của các số thực, sự hội tụ hay phân kỳ, tổng của chuỗi số. Sau đó, các tiêu chuẩn kiểm tra tính hội tụ và phân kỳ của các chuỗi số, cùng với một số tính chất khác của chúng sẽ được trình bày.

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CHUỖI SỐ

Định nghĩa 1.1. Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số. Tổng vô hạn

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số và được ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, trong đó a_n được gọi là số hạng tổng quát và $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ được gọi là tổng riêng thứ n .

i) Nếu dãy số $\{S_n\}$ là hội tụ với $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, thì ta nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ và có tổng bằng S và viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

ii) Ngược lại, nếu dãy số $\{S_n\}$ là phân kỳ, thì ta nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là phân kỳ.

Ví dụ 1.2. Xét chuỗi số sau:

$$1 + 2 + \cdots + n + \cdots$$

Chuỗi số này có $S_n = n(n+1)/2$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ (phân kỳ). Kết luận, chuỗi số là phân kỳ.

Ví dụ 1.3. Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của chuỗi hình học

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \dots, a \neq 0^{(1)}$$

Ta có

$$\begin{cases} S_n &= a + aq + \dots + aq^{n-1} \\ qS_n &= aq + aq^2 + \dots + aq^n \end{cases}$$

Do đó $S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$ ($q \neq 1$) và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{nếu } |q| < 1 \\ \infty & \text{nếu } |q| > 1. \end{cases}$$

- Trường hợp $q = 1$ dễ thấy chuỗi số đã cho phân kỳ vì $S_n = an$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.
- Trường hợp $q = -1$ ta có $S_n = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ a, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$ nên không tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Chuỗi đã cho là phân kỳ.

Kết luận: chuỗi hình học đã cho hội tụ và có tổng bằng $\frac{a}{1-q}$ nếu $|q| < 1$ và phân kỳ nếu $|q| \geq 1$.

Ví dụ 1.4. Viết số thực $2.3\overline{17} = 2.3171717\dots$ dưới dạng phân số.

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \dots$$

Sau số hạng đầu tiên thì chuỗi đã cho là một chuỗi hình học với $a = \frac{17}{10^3}$ và $q = \frac{1}{10^2}$. Do đó

$$2.3\overline{17} = \frac{23}{10} + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1147}{495}.$$

Ví dụ 1.5. Chứng minh rằng $1.9999\dots = 2$.

Chứng minh. Ta có

$$1.9999\dots = 1.\bar{9} = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots = 1 + \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Sau số hạng đầu tiên thì tổng đã cho là một chuỗi hình học với $a = \frac{9}{10}$ và $q = \frac{1}{10}$. Do đó

$$1.9999\dots = 1.\bar{9} = 1 + \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2. \quad \blacksquare$$

⁽¹⁾còn gọi là chuỗi của cấp số nhân.

Nếu chỉ nhìn thoáng qua thì có vẻ như là $1.9999 \dots < 2$. Chính vì vậy, nếu chưa được học khái niệm về giới hạn hoặc chuỗi số, đẳng thức này có lẽ sẽ gây bối rối cho người đọc.

Ví dụ 1.6. Chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ và tính tổng.

Trước hết ta phân tích $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. Kết luận: Chuỗi đã cho hội tụ và có tổng bằng 1.

Ví dụ 1.7. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Với $1 < m \in \mathbb{N}$ bất kỳ, chọn $n > 2^{m+1}$ ta được

$$\begin{aligned} S_n &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^m + 1} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}} \right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^m \cdot \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= 1 + \frac{m+1}{2} \end{aligned}$$

Dãy các tổng riêng S_n có thể lớn tùy ý nên $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, chuỗi đã cho phân kỳ.

Định lý 1.8 (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ).

Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ, thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Chứng minh. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, ta có $a_n = S_n - S_{n-1}$. Vì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Vì $n-1 \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$. Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0. \quad \blacksquare$$

Chú ý 1.9. 1. Mệnh đề đảo của Định lý 1.8 là không đúng. Chẳng hạn như chuỗi điều hòa sau đây $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$, nhưng chuỗi này là phân kỳ (Xem Ví dụ 1.34 (tr. 14) dưới đây).

2. Định lý 1.8 cho chúng ta một điều kiện đủ để kiểm tra một chuỗi là phân kỳ. Cụ thể, nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ không tồn tại hoặc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ thì chuỗi đã cho là phân kỳ.

Chẳng hạn như chuỗi số sau đây $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ nên chuỗi đã cho là phân kỳ. Tuy nhiên lưu ý rằng nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ thì chúng ta chưa có kết luận gì về tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Thay đổi một số hạng đầu tiên của một chuỗi thì không làm ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số đó. Chẳng hạn như hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ sẽ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ (với mọi $M > 1$).

Ví dụ 1.10. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ là phân kỳ bởi vì $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$.

Định lý 1.11 (Các phép toán trên chuỗi số hội tụ). Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi số hội tụ, thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cũng là một chuỗi số hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ví dụ 1.12. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2016}{n(n+1)} + \frac{2017}{2^n}\right)$ hội tụ và tính tổng.

Ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2016}{n(n+1)}$ hội tụ và có tổng bằng 2016, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2017}{2^n}$ hội tụ và có tổng bằng 2017 nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2016}{n(n+1)} + \frac{2017}{2^n}\right)$ cũng hội tụ và có tổng bằng 4033.

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

Định nghĩa 1.13. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với $a_n > 0$ được gọi là một chuỗi số dương.

Nhận xét rằng dãy các tổng riêng S_n là một dãy số tăng, nên một chuỗi số dương là hội tụ khi và chỉ khi S_n là bị chặn. Trong bài này chúng ta sẽ nghiên cứu các tiêu chuẩn để một chuỗi số dương là hội tụ.

1.2.1 Các tiêu chuẩn so sánh

Định lý 1.14 (Tiêu chuẩn so sánh 1). Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ có $a_n \leq b_n$ với mọi n hoặc kể từ một số n nào đó. Khi đó

- i) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng là hội tụ.
- ii) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng là phân kỳ.

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = B_n. \quad (1.1)$$

- i) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ và $B_n \leq B$ với mọi n . Bất đẳng thức (1.1) chứng tỏ dãy tổng riêng A_n là một dãy số bị chặn trên, hơn nữa nó tăng do tính chất của chuỗi số dương, nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Vì vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.
- ii) Bạn đọc có thể tự chứng minh một cách đơn giản cũng dựa vào bất đẳng thức (1.1). ■

Ví dụ 1.15. Xét sự hội tụ của chuỗi số nghịch đảo bình phương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ta có $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$ mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ theo Ví dụ 1.6 (tr. 3) nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ và do đó $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ cũng hội tụ.

Ví dụ 1.16. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$.

Chứng minh. Ta có $\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$. Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là hội tụ theo Ví dụ 1.15, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ cũng là hội tụ. ■

Ví dụ 1.17. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Chứng minh. Ta có $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$. Do đó $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là phân kỳ theo Ví dụ 1.7 (tr. 3), nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ là phân kỳ. ■

Ví dụ 1.18. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}$.

Ta có

$$u_n = \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}} = \frac{1}{e^{\ln n \ln[\ln(\ln(n+1))]} = \frac{1}{n^{\ln[\ln(\ln(n+1))]}.$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln[\ln(\ln(n+1))] = +\infty$ nên tồn tại $N_0 > 0$ sao cho $\ln[\ln(\ln(n+1))] > 2, \forall n > N_0$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{n^2} \forall n > N_0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} u_n \text{ hội tụ.}$$

Định lý 1.19 (Tiêu chuẩn so sánh 2). Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 \text{ và } c \neq \infty.$$

Khi đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.

Chứng minh. Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $N \in \mathbb{N}$

$$c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \Leftrightarrow (c - \epsilon)b_n < a_n < (c + \epsilon)b_n, \forall n \geq N.$$

Lấy tổng từ N đến ∞ ta được

$$(c - \epsilon) \sum_{n=N}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leq (c + \epsilon) \sum_{n=N}^{\infty} b_n. \quad (1.2)$$

Ta chọn ϵ đủ nhỏ sao cho $c - \epsilon > 0$. Theo tiêu chuẩn so sánh 1,

- vế phải của bất đẳng thức (1.2) chứng tỏ rằng nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ cũng hội tụ.}$$

- vế trái của bất đẳng thức (1.2) chứng tỏ rằng nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ cũng hội tụ.}$$

■

Chú ý 1.20.

a) Các trường hợp đặc biệt

- Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ. Điều này dễ hiểu vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ suy ra với n đủ lớn thì $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$ hay $a_n \leq b_n$ với mọi $n \geq N$ nào đó.

- Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng phân kỳ. Điều này cũng dễ hiểu vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ suy ra với n đủ lớn thì $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ hay $a_n \geq b_n$ với mọi $n \geq N$ nào đó.

b) Cũng giống như TPSR, khi xét sự hội tụ của chuỗi số người ta chỉ quan tâm đến "dạng điệu" của số hạng tổng quát a_n tại vô cùng. Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để so sánh chuỗi số đã cho với một trong hai chuỗi số sau đây:

- Chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ $\begin{cases} \text{hội tụ nếu } |q| < 1, \\ \text{phân kỳ nếu } |q| \geq 1. \end{cases}$
- Chuỗi hàm zeta $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\begin{cases} \text{hội tụ nếu } \alpha > 1, \\ \text{phân kỳ nếu } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Ví dụ 1.21. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$.

Chứng minh. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là n^2 và số hạng trội của mẫu số là $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Điều đó gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. Ta có

$$a_n = \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}, \quad b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+n) \cdot n^{1/2}}{\sqrt{n^5+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^5}}} = 1.$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ là phân kỳ theo Ví dụ 1.34 (tr. 14) nên chuỗi đã cho cũng phân kỳ. ■

Ví dụ 1.22. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

Chứng minh. Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là 3^n và số hạng trội của mẫu số là 5^n . Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Ta có

$$a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}, \quad b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n+3^n)5^n}{(4^n+5^n)3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = 1.$$

Mà chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ là hội tụ theo Ví dụ 1.3 (tr. 1), do đó chuỗi số đã cho cũng là hội tụ. ■