

PGS. TS. NGUYỄN THỊ BẠCH KIM, TS. LÊ QUANG THỦY

NHẬP MÔN LÝ THUYẾT TỐI ƯU

NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA HÀ NỘI

Biên mục trên xuất bản phẩm của Thư viện Quốc gia Việt Nam

Nguyễn Thị Bạch Kim

Nhập môn Lý thuyết tối ưu / Nguyễn Thị Bạch Kim, Lê Quang Thuỷ. - H. :
Bách khoa Hà Nội, 2021. - 218tr. : hình vẽ, bảng ; 24cm

1. Lý thuyết tối ưu 2. Giáo trình
519.60711 - dc23

BKM0150p-CIP

Lời mở đầu

Lý thuyết tối ưu được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau như tài chính, kinh tế, công nghệ thông tin và truyền thông, khoa học dữ liệu, quản lý, xây dựng, kỹ thuật v.v.. Đồng thời, lý thuyết tối ưu liên quan chặt chẽ và góp phần thúc đẩy sự phát triển của nhiều ngành toán học khác như giải tích, tính toán khoa học, điều khiển toán học, giải tích biến phân, v.v..

Cuốn sách "**Nhập môn Lý thuyết tối ưu**" trình bày một số nội dung cơ bản nhất của lý thuyết tối ưu và được sử dụng làm giáo trình phục vụ đào tạo bậc sau đại học tại Viện Toán ứng dụng và Tin học, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Cuốn sách này cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên, học viên cao học, nghiên cứu sinh trong các ngành Kinh tế, Công nghệ thông tin, cũng như các ngành khoa học công nghệ khác như Cơ khí, Điện, Điện tử viễn thông, v.v..

Để người đọc tiện tra cứu các khái niệm, danh mục Từ khóa ở cuối cuốn sách đã sắp xếp tên các khái niệm theo thứ tự chữ cái đầu kèm theo trang cần tìm.

Các tác giả chân thành cảm ơn TS. Tạ Anh Sơn, TS. Nguyễn Thị Toàn, TS. Nguyễn Quang Thuận, TS. Nguyễn Cảnh Nam, TS. Trịnh Ngọc Hải, TS. Trần Ngọc Thăng, TS. Phạm Thị Hoài, v.v.. đã cho nhiều ý kiến quý báu về nội dung cuốn sách. Chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Bách khoa cùng các biên tập viên đã đọc bản thảo và cho các ý kiến góp ý để cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Cuốn sách này chắc chắn còn nhiều thiếu sót. Các tác giả rất mong nhận được những góp ý của độc giả để cuốn sách hoàn thiện hơn trong lần xuất bản sau.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hà Nội, tháng 05 năm 2021
Các tác giả

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclid n chiều
$x \in D$	x thuộc tập D
$x \notin D$	x không thuộc tập D
$\emptyset$	tập rỗng
$C \setminus D$	hiệu của tập C và D
$C \cup D$	hợp của tập C và tập D
$C \cap D$	giao của tập C và tập D
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của x và y
$\ x\ $	chuẩn Euclid của x
$ x $	giá trị tuyệt đối của x
$\text{aff } E$	bao afin của tập E
$\text{conv } E$	bao lồi của tập E
$\dim E$	thứ nguyên (hoặc số chiều) của tập E
$ X $	số phần tử của tập X
$[x^1, x^2]$	đoạn nối hai điểm x^1 và x^2
$\text{int } X$	phần trong của tập X
$\text{ri } X$	phần trong tương đối của tập X
$\text{rec } X$	nón lồi xa của tập X
$\text{cone}\{v^1, \dots, v^k\}$	nón sinh bởi các véc tơ $v^1, \dots, v^k$
$T(X, x^*)$	nón tiếp xúc với tập X tại điểm x^*
$N_X(x^*)$	nón pháp tuyến của tập X tại điểm x^*
N^0	nón cực của nón N
$F(X, x^*)$	tập các hướng chấp nhận được của tập X tại x^*
$B(x^*, \varepsilon)$	ε -lân cận của điểm x^*
$\text{dom } f$	miền xác định hữu hiệu của f
$\text{epi}(f)$	epigraph của hàm f
$\text{hypo}(f)$	hypograph của hàm f
$f'(x^0, d)$	đạo hàm theo hướng d của hàm f tại x^0
$\nabla f(x)$	véc tơ gradient của hàm f tại điểm x
$\nabla^2 f(x)$	ma trận Hesse của hàm f tại điểm x

f'_{x_i}	đạo hàm riêng của f theo biến x_i
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
A^{-1}	ma trận nghịch đảo của ma trận khả nghịch A
I_m	ma trận đơn vị cấp m
$\text{rank} A$	hạng của ma trận A
$\mathbb{L}$	hàm Lagrange
v.đ.k.	viết tắt của cụm từ "với điều kiện"
t.ư.	viết tắt của từ "tương ứng"

Mục lục

Lời mở đầu.	i
Một số ký hiệu và chữ viết tắt	iii
Chương 1. Bài toán tối ưu	1
1.1 Mô hình toán học của bài toán tối ưu	2
1.2 Một số ví dụ thực tế	5
1.3 Phân loại các bài toán tối ưu	12
1.4 Điều kiện tồn tại nghiệm tối ưu	14
Chương 2. Tập lồi	22
2.1 Tập lồi	22
2.1.1 Định nghĩa	22
2.1.2 Bao lồi	26
2.1.3 Bao đóng, phần trong và phần trong tương đối của tập lồi	28
2.1.4 Phương lồi xa, phương cực biên, diện, điểm cực biên . .	31
2.2 Định lý tách tập lồi	33
2.3 Tập lồi đa diện	37
2.3.1 Diện và đỉnh của tập lồi đa diện	38
2.3.2 Định lý biểu diễn tập lồi đa diện	50
2.3.3 Tập lồi đa diện và ánh xạ tuyến tính	54
2.4 Nón lồi xa, nón cực, nón pháp tuyến và nón tiếp xúc	56
2.4.1 Nón lồi xa và nón cực	59
2.4.2 Nón pháp tuyến	61
2.4.3 Nón tiếp xúc	64
Chương 3. Hàm lồi và hàm lồi suy rộng	70
3.1 Hàm lồi	70
3.1.1 Định nghĩa	70
3.1.2 Đạo hàm theo hướng và tính khả vi của hàm lồi	75
3.1.3 Dưới vi phân	83

3.2	Hàm lỗi suy rộng	90
3.2.1	Hàm tựa lỗi	90
3.2.2	Hàm giả lỗi	95
Chương 4. Tính chất tập nghiệm, điều kiện tối ưu và đối ngẫu		101
4.1	Tính chất tập nghiệm	101
4.2	Điều kiện tối ưu	109
4.2.1	Điều kiện tối ưu cho bài toán có ràng buộc tập	109
4.2.2	Định lý Karush – Kuhn – Tucker (KKT) cho bài toán tối ưu có ràng buộc hiển	121
4.2.3	Nghiệm tối ưu xấp xỉ	134
4.3	Đối ngẫu	136
4.3.1	Bài toán đối ngẫu Lagrange	136
4.3.2	Các định lý đối ngẫu	138
4.3.3	Điểm yên ngựa	146
Chương 5. Quy hoạch lồi		156
5.1	Bài toán quy hoạch lồi đảo và bài toán quy hoạch tích lồi	157
5.1.1	Bài toán quy hoạch lồi đảo	157
5.1.2	Bài toán quy hoạch tích lồi	160
5.2	Thuật toán nhánh cận giải bài toán quy hoạch lồi	165
5.2.1	Phân hoạch tập chấp nhận được	166
5.2.2	Tính cận dưới của bài toán con	168
5.2.3	Tính cận dưới và cận trên của bài toán quy hoạch lồi ($P_{cc}(D)$)	172
5.2.4	Thuật toán nhánh cận giải bài toán quy hoạch lồi	173
5.3	Thuật toán xấp xỉ ngoài giải bài toán quy hoạch lồi	186
5.3.1	Lược đồ chung	186
5.3.2	Xây dựng đa diện ban đầu	187
5.3.3	Xác định tập đỉnh của đa diện	188
5.3.4	Thuật toán xấp xỉ ngoài giải bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc tuyến tính	192
5.3.5	Thuật toán xấp xỉ ngoài giải bài toán quy hoạch lồi với ràng buộc lồi	200
5.3.6	Ứng dụng phương pháp xấp xỉ ngoài giải bài toán quy hoạch tích lồi	202
Tài liệu tham khảo		214
Danh mục thuật ngữ		217

Chương 1

Bài toán tối ưu

Trong cuốn giáo trình này, chúng ta làm việc trên không gian Euclid¹ $\mathbb{R}^n$. Mỗi điểm x trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một bộ n số thực được sắp có thứ tự và được viết dưới dạng cột

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Mỗi số x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, được gọi là *tọa độ thứ i* của điểm x . Như thường lệ, ta quy ước

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Điểm $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ có tất cả các tọa độ bằng 0, tức $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$. Mỗi điểm $x \in \mathbb{R}^n$ có thể được xem là một *véc tơ* có điểm đầu là $\mathbf{0}$ và điểm cuối là x . *Tích vô hướng* của hai véc tơ x và y trong $\mathbb{R}^n$ được biểu diễn là

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y.$$

¹EUCLID (330 trước CN – 275 trước CN): Người đời sau chỉ biết mơ hồ hình như nhà toán học thiên tài này là người Hy Lạp, sống và làm việc tại Athènes. Euclid nổi tiếng với bộ sách "Cơ sở" gồm 13 tập trình bày một cách hệ thống toàn bộ kiến thức toán học thời bấy giờ. Không gian Euclid ban đầu được hiểu như không gian thực ba chiều với hệ tiên đề Euclid. Sau đó, nhà toán học Ba Lan là Banach (1892 – 1945) đã mở rộng nó sang không gian nhiều chiều trong luận án tiến sĩ (1920) của ông.

Chuẩn Euclid (hay *độ dài*) của véc tơ $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\|x\|$, là một số thực không âm được xác định bởi

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Khoảng cách giữa hai véc tơ $x, y \in \mathbb{R}^n$ được định nghĩa là chuẩn của hiệu hai véc tơ đó, nghĩa là bằng

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hiển nhiên là khoảng cách giữa x và y bằng khoảng cách giữa y và x . Với mỗi số thực $\varepsilon > 0$, ta gọi tập

$$B(x^*, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \varepsilon\}$$

là một ε -*lân cận* của điểm $x^* \in \mathbb{R}^n$.

1.1 Mô hình toán học của bài toán tối ưu

Cho $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ và $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Bài toán tối ưu* được phát biểu như sau

$$f(x) \rightarrow \inf \quad \text{v.đ.k.} \quad x \in X, \quad (P_m(X))$$

hoặc

$$f(x) \rightarrow \sup \quad \text{v.đ.k.} \quad x \in X. \quad (P_M(X))$$

Ta gọi f là *hàm mục tiêu* và X là *tập nghiệm chấp nhận được* hay *tập ràng buộc* của bài toán. Mỗi điểm $x \in X$ được gọi là một *nghiệm chấp nhận được* hay một *phương án chấp nhận được* hoặc một *phương án*.

Giá trị tối ưu của bài toán $(P_m(X))$, ký hiệu là $\inf f(X)$, là cận dưới lớn nhất (hay giá trị infimum) của giá trị hàm f trên X . Theo định nghĩa, $t_0 = \inf f(X)$ với $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, có nghĩa là

$$f(x) \geq t_0 \quad \text{với mọi } x \in X \quad \text{và} \quad \exists \{x^k\} \subset X \quad \text{sao cho} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = t_0.$$

Tương tự, *giá trị tối ưu* của bài toán $(P_M(X))$, ký hiệu là $\sup f(X)$, là cận trên nhỏ nhất (hay giá trị supremum) của giá trị hàm f trên X . Giả sử $t_* = \sup f(X)$ với $t_* \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Khi đó,

$$f(x) \leq t_* \quad \text{với mọi } x \in X \quad \text{và} \quad \exists \{x^k\} \subset X \quad \text{sao cho} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = t_*.$$

Nếu tồn tại $x^0 \in X$ sao cho $f(x^0) = \inf f(X)$, tức

$$x^0 \in X \quad \text{và} \quad f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x \in X$$

thì x^0 được gọi là *ng nghiệm tối ưu*, hoặc *ng nghiệm tối ưu toàn cục*, hoặc *ng nghiệm cực tiểu toàn cục* (global minimizer), hoặc chỉ đơn giản là *ng nghiệm* của bài toán $(P_m(X))$. Một ng nghiệm tối ưu còn được gọi là một *phương án tối ưu* hay *lời giải* của bài toán đã cho. Nếu bài toán $(P_m(X))$ có ng nghiệm tối ưu x^0 thì giá trị tối ưu của bài toán là $f(x^0)$. Khi đó, bài toán $(P_m(X))$ có thể viết dưới dạng

$$\min f(x) \quad \text{v.đ.k.} \quad x \in X \quad (P_m(X))$$

và giá trị tối ưu được ký hiệu là $\min\{f(x) : x \in X\}$. Tập *ng nghiệm tối ưu* của bài toán $(P_m(X))$ được ký hiệu là $\text{Argmin}\{f(x) : x \in X\}$ hoặc $\text{Argmin}(P_m(X))$. Một ng nghiệm chấp nhận được $x^0 \in X$ được gọi là *ng nghiệm tối ưu chặt* hoặc *ng nghiệm cực tiểu toàn cục chặt* của bài toán $(P_m(X))$ nếu $f(x^0) < f(x)$ với mọi $x \in X$ và $x \neq x^0$. Hiển nhiên là x^0 là ng nghiệm cực tiểu toàn cục chặt của bài toán $(P_m(X))$ khi và chỉ khi $\text{Argmin}(P_m) = \{x^0\}$.

Tương tự, nếu $x^* \in X$ và $f(x^*) \geq f(x)$ với mọi $x \in X$ thì ta nói x^* là ng nghiệm tối ưu của bài toán $(P_M(X))$. Điểm $x^* \in X$ được gọi là ng nghiệm tối ưu chặt hoặc ng nghiệm cực đại toàn cục chặt của bài toán $(P_M(X))$ nếu $f(x^*) > f(x)$ với mọi $x \neq x^*$ và $x \in X$. Ký hiệu $\text{Argmax}\{f(x) : x \in X\}$ hoặc $\text{Argmax}(P_M(X))$ là tập ng nghiệm tối ưu của bài toán $(P_M(X))$. Nếu $\text{Argmax}(P_M(X)) \neq \emptyset$ thì giá trị tối ưu của bài toán $(P_M(X))$ là $f(\bar{x})$, trong đó $\bar{x} \in \text{Argmax}(P_M(X))$.

Điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ được gọi là ng nghiệm tối ưu địa phương hoặc ng nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán $(P_m(X))$ nếu tồn tại một ε -lân cận $B(x^0, \varepsilon)$ của điểm x^0 sao cho

$$x^0 \in X \quad \text{và} \quad f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x \in B(x^0, \varepsilon) \cap X.$$

Nếu $f(x^0) < f(x)$ với mọi $x \neq x^0$ và $x \in B(x^0, \varepsilon) \cap X$ thì x^0 là ng nghiệm cực tiểu địa phương chặt của bài toán $(P_m(X))$.

Tương tự, nếu tồn tại một ε -lân cận $B(x^*, \varepsilon)$ của điểm $x^* \in X$ thỏa mãn

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap X$$

thì ta nói x^* là ng nghiệm tối ưu địa phương của bài toán $(P_M(X))$. Trong trường hợp $f(x^*) > f(x)$ với mọi $x \neq x^*$ và $x \in B(x^*, \varepsilon) \cap X$ thì x^* là ng nghiệm cực đại địa phương chặt của bài toán $(P_M(X))$.

Lưu ý rằng, bài toán $(P_m(X))$ và bài toán $(P_M(X))$ có thể không có ng nghiệm tối ưu nhưng giá trị tối ưu thì luôn tồn tại. Vì

$$\text{Argmin}\{f(x) : x \in X\} = -\text{Argmax}\{-f(x) : x \in X\}$$

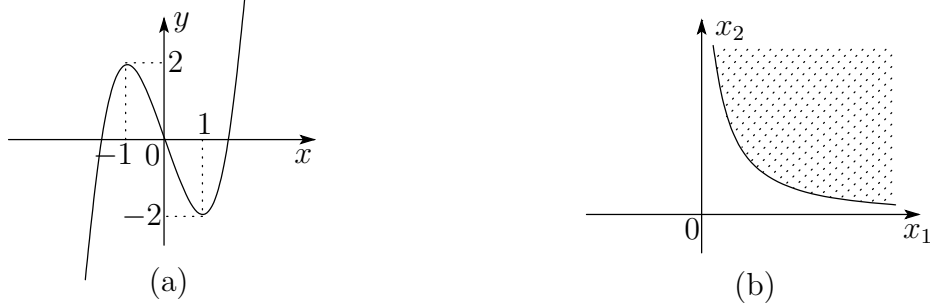
và

$$\inf f(X) = -\sup(-f(X))$$

nên ta chỉ cần xét bài toán $(P_m(X))$ hoặc bài toán $(P_M(X))$.

Ví dụ 1.1.

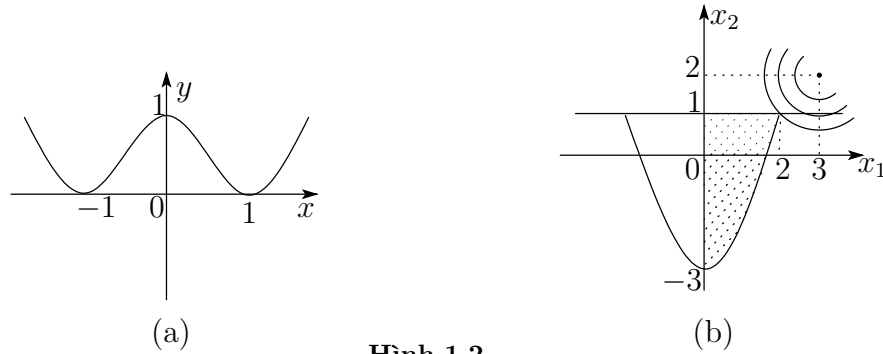
- i) Với $f(x) = x^3 - 3x$ và $X = \mathbb{R}$, bài toán $(P_m(X))$ có một nghiệm tối ưu địa phương là $x^* = 1$ nhưng không có nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu $t_0 = -\infty$. Xem minh họa ở Hình 1.1(a).
- ii) Giả sử $f(x) = x_1$ và $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Khi đó, bài toán $(P_m(X))$ có $\text{Argmin}\{f(x) : x \in X\} = \emptyset$ và giá trị tối ưu $t_0 = 0$. Xem Hình 1.1(b).

**Hình 1.1.**

- iii) Nếu $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ và $X = \mathbb{R}$ thì bài toán $(P_m(X))$ có hai nghiệm tối ưu là $x^* = -1$ và $\bar{x}^* = 1$, và giá trị tối ưu $f_{opt} = 0$. Xem minh họa ở Hình 1.2(a).
- iv) Xét bài toán $(P_m(X))$ với $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$ và tập

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2 \leq 3, x_2 \leq 1, x_1 \geq 0\}.$$

Tập chấp nhận được X được minh họa ở Hình 1.2(b). Với mỗi số thực $\alpha > 0$, đường mức $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = \alpha\}$ là đường tròn tâm $(3, 2)^T$, bán kính $\sqrt{\alpha}$. Theo hình học, dễ thấy bài toán $(P_m(X))$ có nghiệm tối ưu chặt là $x^* = (2, 1)^T \in X$ và giá trị tối ưu $\min\{f(x) : x \in X\} = f(x^*) = 2$.

**Hình 1.2.**

v) Cho $f(x) = x_1$ và

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2 \leq 3, x_2 \leq 1, |x_1| \geq 1\}.$$

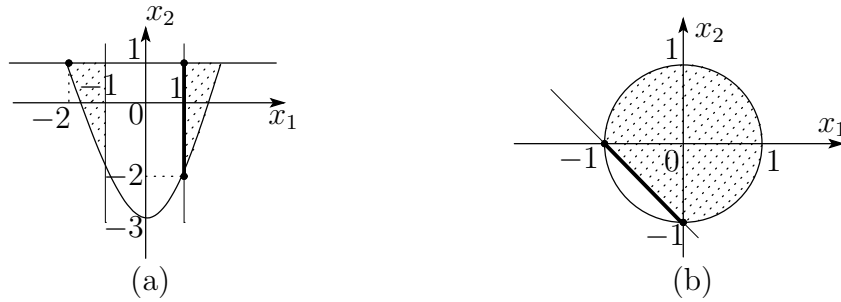
Xem minh họa ở Hình 1.3(a). Tập nghiệm tối ưu địa phương của bài toán $(P_m(X))$ là đoạn thẳng nối điểm $(1, 1)^T$ và $(1, -2)^T$. Bài toán có nghiệm tối ưu chặt là $x^* = (-2, 1)^T$ và giá trị tối ưu là

$$\min\{f(x) : x \in X\} = f(x^*) = -2.$$

vi) Bài toán $\min\{f(x) = x_1 + x_2 : x \in X\}$, trong đó

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq -1\},$$

có vô số nghiệm. Tập nghiệm tối ưu $\text{Argmin}\{f(x) : x \in X\}$ là đoạn thẳng nối điểm $(-1, 0)^T$ và $(0, -1)^T$. Xem Hình 1.3(b). Giá trị tối ưu là $f_{\text{opt}} = -1$.



Hình 1.3.

1.2 Một số ví dụ thực tế

Ví dụ 1.2. (Bài toán định vị kho chứa hàng)

Một công ty cung cấp một loại hàng cho n siêu thị. Giả sử đã biết vị trí của siêu thị thứ j là (u_1^j, u_2^j) , $j = 1, \dots, n$. Theo đơn đặt hàng, mỗi tuần, số đơn vị hàng công ty phải chuyển đến siêu thị thứ j là b_j , $j = 1, \dots, n$. Công ty dự định xây m kho chứa loại hàng này sao cho kho thứ i phải chứa được a_i đơn vị hàng, $i = 1, 2, \dots, m$ và

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j.$$

Công ty cần xác định địa điểm để xây m kho này và số đơn vị hàng x_{ij} chuyển từ các kho $i = 1, \dots, m$ đến các siêu thị $j = 1, \dots, n$ sao cho tổng

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}$$

là nhỏ nhất, trong đó d_{ij} là khoảng cách từ kho thứ i đến siêu thị thứ j , $i = 1, \dots, m$ và $j = 1, \dots, n$, với các giả thiết sau:

Hàng có thể được chuyển từ một kho đến một siêu thị bất kỳ. Mỗi siêu thị đều nhận đủ số lượng hàng yêu cầu, tức

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Các siêu thị không được trả lại hàng về kho, tức $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Mô hình toán học của bài toán này là

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} & (P_{DL}) \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng, ta cần phải xác định cả x_{ij} và d_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Ký hiệu (v_1^i, v_2^i) là vị trí của kho thứ i , $i = 1, \dots, m$. Khi đó, khoảng cách d_{ij} từ kho thứ i đến siêu thị thứ j là

$$d_{ij} = \sqrt{(v_1^i - u_1^j)^2 + (v_2^i - u_2^j)^2}.$$

Bài toán (P_{DL}) là *bài toán tối ưu phi tuyến* với $(2m + m \times n)$ biến v_1^i, v_2^i, x_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Trong trường hợp vị trí các kho đã biết trước thì khoảng cách d_{ij} là số xác định. Khi đó, bài toán (P_{DL}) trở thành bài toán vận tải thông thường có tổng lượng phát $\sum_{i=1}^m a_i$ lớn hơn hoặc bằng tổng lượng thu $\sum_{j=1}^n b_j$, xem [15],[32].

Ví dụ 1.3. (*Bài toán lập kế hoạch sản xuất*)

Một xí nghiệp dự định sản xuất n loại sản phẩm khác nhau từ m loại nguyên liệu. Biết rằng:

Lợi nhuận thu được khi bán một đơn vị sản phẩm loại j là c_j , chi phí để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại j là d_j , $j = 1, \dots, n$;

Trữ lượng nguyên liệu loại i mà xí nghiệp có là b_i , $i = 1, \dots, m$;

Để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại j cần a_{ij} đơn vị nguyên liệu loại i , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$;

Ký hiệu x_j là số đơn vị sản phẩm loại j mà xí nghiệp sẽ sản xuất, $j = 1, \dots, n$.
Hiển nhiên là $x_j \geq 0$ với mọi j . Khi đó, tổng lợi nhuận xí nghiệp thu được là

$$p(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n.$$

Tổng chi phí xí nghiệp phải chi trả là

$$q(x) = d_1x_1 + \dots + d_nx_n.$$

Do lượng nguyên liệu loại i mà xí nghiệp sẽ sử dụng để sản xuất không được vượt quá trữ lượng nên

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Khi đó:

- i) Nếu bài toán đặt ra là xí nghiệp nên sản xuất theo phương án nào, tức sản xuất mỗi loại bao nhiêu đơn vị sản phẩm, để hiệu quả sản xuất tính theo tỷ số (tổng lợi nhuận)/(tổng chi phí) là cao nhất thì mô hình toán học của bài toán là

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c_1x_1 + \dots + c_nx_n}{d_1x_1 + \dots + d_nx_n} \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Đây là *bài toán quy hoạch phân thức tuyến tính*.

- ii) Nếu xí nghiệp muốn tìm phương án sản xuất để cực đại lợi nhuận hoặc cực tiểu chi phí thì bài toán cần giải là *bài toán quy hoạch tuyến tính* thông thường

$$\begin{aligned} \max \quad & p(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

hoặc

$$\begin{aligned} \min \quad & q(x) = d_1x_1 + \dots + d_nx_n \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

- iii) Giả sử xí nghiệp này muốn tìm phương án sản xuất để cực tiểu chi phí và sản phẩm sản xuất của họ là n loại máy bay (hoặc sản phẩm nào đó có giá thành lớn). Khi đó, họ cần giải *bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên* như sau

$$\begin{aligned} \min \quad & q(x) = d_1x_1 + \cdots + d_nx_n \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \text{ và nguyên} \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

- iv) Nếu xí nghiệp muốn tìm phương án sản xuất sao cho vừa cực đại lợi nhuận vừa cực tiểu chi phí thì bài toán trở thành *bài toán quy hoạch tuyến tính hai mục tiêu*:

$$\begin{aligned} \max \quad & p(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \max \quad & -q(x) = -d_1x_1 - \cdots - d_nx_n \\ \text{v.đ.k.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Như đã thấy trong ví dụ này, mặc dù cùng một đối tượng thực tế, nhưng nếu ta quan tâm đến các mục tiêu khác nhau thì bài toán sẽ có các mô hình toán học khác nhau.

Ví dụ 1.4. (*Bài toán thiết kế mạng phủ sóng cảm biến không dây²*)

Xét một mạng cảm biến không dây (wireless sensor networks) trong $\mathbb{R}^p$ bao gồm m cảm biến (sensor) có nhiệm vụ thu thập dữ liệu như nhiệt độ, nồng độ ô nhiễm không khí, độ ẩm ... ở môi trường xung quanh để gửi cho người sử dụng thông qua n trạm thu thông tin, được gọi là các điểm đích (target). Nếu xét mạng cảm biến trên mặt phẳng thì $p = 2$. Nếu xét mạng cảm biến trong không gian thì $p = 3$. Với mỗi $i = 1, \dots, m$, bán kính cảm biến của cảm biến thứ i , được ký hiệu r_i , thỏa mãn

$$r_i^{\min} \leq r_i \leq r_i^{\max},$$

trong đó $r_i^{\min}$ và $r_i^{\max}$ là hai số thực dương cho trước. Bài toán đặt ra là xác định bán kính cảm biến r_i , $i = 1, \dots, m$, sao cho mỗi điểm đích đều được phủ bởi ít nhất một cảm biến và tổng năng lượng tiêu thụ của toàn mạng là nhỏ nhất với giả thiết đã biết:

²theo [2], trang 356 – 357.

Vị trí của cảm biến thứ i là $s^i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1, \dots, m$.

Năng lượng tiêu thụ của cảm biến thứ $i \in \{1, \dots, m\}$ trên một đơn vị thời gian là

$$c_i(r_i) = \delta r_i^\beta + \gamma,$$

trong đó số thực $\delta > 0$, $\beta \in [2, 4]$ là các tham số phụ thuộc vào từng thiết bị cụ thể và γ là năng lượng tiêu thụ khi cảm biến không hoạt động. Theo [2], năng lượng tiêu thụ $c_i(r_i)$ là một hàm đơn điệu, không giảm theo bán kính cảm biến r_i .

Vị trí của điểm đích thứ j là $t^j \in \mathbb{R}^p$, $j = 1, \dots, n$.

Ký hiệu $r = (r_1, \dots, r_m)^T$, $r^{min} = (r_1^{min}, \dots, r_m^{min})^T$ và $r^{max} = (r_1^{max}, \dots, r_m^{max})^T$. Khi đó, mô hình toán học của bài toán này là

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m c_i(r_i) \\ \text{v.đ.k} \quad & \min_{1 \leq i \leq m} (\|s^i - t^j\| - r_i) \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \\ & r^{min} \leq r \leq r^{max}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.5. (*Mô hình Entropy cực đại³*)

Xét mật độ phân bố xác suất rời rạc tương ứng với giá trị đo được là một trong n giá trị $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ký hiệu p_i là xác suất tương ứng với giá trị x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Các xác suất p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, phải thỏa mãn điều kiện

$$p_i \geq 0, \text{ và } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Entropy của mật độ như vậy là

$$\varepsilon = - \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i).$$

Giá trị trung bình của mật độ này là

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

³theo [18], trang 329.