

NGUYỄN VĂN NGHỊ – NGUYỄN CẢNH LƯƠNG

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP
TOÁN CAO CẤP**

Tập 2

GIẢI TÍCH HÀM SỐ MỘT BIẾN

NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA HÀ NỘI

Biên mục trên xuất bản phẩm của Thư viện Quốc gia Việt Nam

Nguyễn Văn Nghị

Phương pháp giải bài tập toán cao cấp / Nguyễn Văn Nghị, Nguyễn Cảnh
Lương. - H. : Bách khoa Hà Nội. - 24cm

T.2: Giải tích hàm số một biến. - 2017. - 288tr.

1. Toán cao cấp 2. Giải tích 3. Hàm một biến 4. Phương pháp giải
5. Bài tập

515.930711 - dc23

BKH0072p-CIP

LỜI NÓI ĐẦU

Chương trình Toán cao cấp đang được giảng dạy ở các trường đại học kỹ thuật, gồm những vấn đề cơ bản của Đại số và Giải tích. Ngoài việc trang bị cho sinh viên các kiến thức cơ bản để học các môn cơ sở ngành và các môn chuyên ngành còn nhằm giúp phát triển khả năng tư duy của người học. Để thực hiện được những mục đích trên, ngoài các giáo trình về mặt lý thuyết thì các tài liệu hướng dẫn giải bài tập cũng góp phần quan trọng.

Các tác giả đã biên soạn cuốn sách “*Phương pháp giải bài tập toán cao cấp – Tập 1 – Bài tập đại số*” giúp sinh viên các trường đại học kỹ thuật cũng như sinh viên các ngành toán sử dụng hiệu quả cuốn sách này vào việc học tập môn Đại số trong chương trình Toán cao cấp được giảng dạy ở các trường đại học. Nhằm giúp sinh viên có thêm tài liệu để học tốt kiến thức môn Giải tích (là một phần trong chương trình Toán cao cấp), các tác giả biên soạn tiếp cuốn “*Phương pháp giải bài tập toán cao cấp – Tập 2 – Giải tích hàm số một biến*” gồm 8 chương.

Nội dung mỗi chương gồm ba phần:

1. Tóm tắt lý thuyết cơ bản;
2. Các ví dụ được chọn lọc công phu và đa dạng, được tính cụ thể để minh họa, giúp sinh viên hiểu rõ hơn về lý thuyết cũng như áp dụng hiệu quả vào việc giải các bài tập khác.
3. Các bài tập (hướng dẫn cách giải hoặc đáp số được trình bày vào phần cuối của cuốn sách).

Chúng tôi khuyến khích người học trước khi đọc các ví dụ thì cần nắm thật chắc phần tóm tắt lý thuyết của chương. Đối với các ví dụ thì chúng tôi không khuyến khích người học xem ngay lời giải được trình bày mà nên tự giải xem có được hay không. Nếu người học có lời giải thì so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách. Chúng tôi hy vọng rằng, cuốn sách sẽ là tài liệu giúp người học nắm vững hơn về lý thuyết cũng như vận dụng để làm tốt các bài tập của phần Giải tích hàm số một biến.

Cuốn sách được biên soạn lần đầu nên không tránh khỏi một số thiếu sót. Vì vậy chúng tôi hoan nghênh và mong đợi nhận được ý kiến từ các độc giả góp ý cho cuốn sách này.

Xin chân thành cảm ơn.

Các tác giả

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	3
MỘT SỐ KÝ HIỆU SỬ DỤNG TRONG SÁCH	8
CHƯƠNG 1. SỐ THỰC VÀ DÃY SỐ	9
1.1. Tập bị chặn	9
1.2. Sử dụng định nghĩa chứng minh giới hạn của dãy	10
1.3. Tiêu chuẩn kẹp của dãy số	12
1.4. Giới hạn của dãy số đơn điệu	14
1.5. Tiêu chuẩn Cauchy	16
1.6. Dãy không có giới hạn	17
1.7. Các phép toán về giới hạn	17
Bài tập	18
CHƯƠNG 2. HÀM SỐ, GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ	24
2.1. Miền xác định và miền giá trị của hàm số	24
2.2. Tìm hàm ngược của một hàm số	25
2.3. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số	25
2.4. Xét tính tuần hoàn của hàm số	27
2.5. Sử dụng định nghĩa chứng minh $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (a, L hữu hạn hoặc vô hạn) ..	28
2.6. Chứng tỏ không tồn tại giới hạn	30
2.7. Tính giới hạn của hàm số	31
2.8. Quy tắc thay thế vô cùng bé (VCB) tương đương	35
2.9. Quy tắc thay thế vô cùng lớn (VCL) tương đương	38
2.10. Xét tính liên tục của hàm số	40
2.11. Hàm số liên tục đều trên một khoảng	44
Bài tập	46

CHƯƠNG 3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN.....	55
3.1. Xét tính có đạo hàm của hàm số tại một điểm.....	55
3.2. Xét tính khả vi và tính vi phân của hàm số.....	61
3.3. Tính đạo hàm và vi phân cấp cao của hàm số	64
Bài tập.....	67
CHƯƠNG 4. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI	72
4.1. Các định lý Fermat, Rolle, Lagrange và Cauchy	72
4.2. Quy tắc L'Hospital	77
4.3. Công thức Taylor và công thức Maclaurin.....	82
Bài tập.....	93
CHƯƠNG 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ.....	98
5.1. Chiều biến thiên và cực trị của hàm số.....	98
5.2. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số liên tục trên một đoạn.....	101
5.3. Xét tính lồi lõm của hàm số.....	103
5.4. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số	106
5.5. Đường cong cho bởi phương trình tham số.....	109
5.6. Khảo sát đường cong trong hệ tọa độ cực	113
Bài tập.....	118
CHƯƠNG 6. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH.....	122
6.1. Tính chất của tích phân bất định và các tích phân thông dụng.....	122
6.2. Phương pháp đổi biến	125
6.3. Phương pháp tích phân từng phần	127
6.4. Tích phân phân thức hữu tỷ.....	130
6.5. Một số tích phân có thể hữu tỷ hóa.....	134
Bài tập.....	139
CHƯƠNG 7. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH	142
7.1. Xét tính khả tích của hàm số.....	142
7.2. Sử dụng định nghĩa tích phân xác định để tính tích phân và tính giới hạn của dãy số.....	145
7.3. Công thức đạo hàm theo cận trên	150
7.4. Công thức Newton – Leibnitz.....	153

7.5. Phương pháp đổi biến	156
7.6. Phương pháp tích phân từng phần	159
7.7. Tích phân suy rộng	162
7.8. Một số ứng dụng của tích phân xác định	169
Bài tập.....	179
CHƯƠNG 8. CHUỖI.....	190
8.1. Khái niệm hội tụ của chuỗi số	190
8.2. Tiêu chuẩn hội tụ Cauchy	191
8.3. Sử dụng điều kiện cần, điều kiện đủ xét sự hội tụ của chuỗi số	193
8.4. Miền hội tụ của chuỗi hàm	200
8.5. Hội tụ đều của chuỗi hàm	203
8.6. Khai triển Maclaurin và khai triển Taylor	207
8.7. Tính tổng của chuỗi lũy thừa	211
8.8. Chuỗi Fourier.....	213
Bài tập.....	219
ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN	226
Chương 1	226
Chương 2	231
Chương 3	240
Chương 4	246
Chương 5	250
Chương 6	261
Chương 7	265
Chương 8	279

MỘT SỐ KÝ HIỆU SỬ DỤNG TRONG SÁCH

$\mathbb{N}$	Tập các số tự nhiên
$\mathbb{N}^*$	Tập các số tự nhiên lớn hơn không
$\mathbb{Z}$	Tập các số nguyên
$\mathbb{Q}$	Tập các số hữu tỷ
$[a]$	Phần nguyên của số thực a
$\inf A$	Cận dưới đúng của tập bị chặn dưới A
$\sup A$	Cận trên đúng của tập bị chặn trên A
$\min\{a, b\}$	Số nhỏ nhất trong các số a và b
$\max\{a, b\}$	Số lớn nhất trong các số a và b
$f(a-0)$	Giới hạn trái của hàm f tại a
$f(a+0)$	Giới hạn phải của hàm f tại a
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Giới hạn của hàm f tại a
$u_n \sim v_n$	$u_n; v_n$ là hai dãy vô cùng bé tương đương hoặc là hai dãy vô cùng lớn tương đương
$f(x) \sim g(x) \ (x \rightarrow a)$	f và g là hai vô cùng bé tương đương hoặc hai vô cùng lớn tương đương
$o(\alpha(x))$	Vô cùng bé bậc cao hơn $\alpha(x)$ khi $\alpha(x)$ dần về 0
$f'_-(a)$	Đạo hàm trái của hàm f tại a
$f'_+(a)$	Đạo hàm phải của hàm f tại a
Δf	Số gia của hàm số f
df	Vi phân của hàm số f
$d^n f$	Vi phân cấp n của hàm f
$\int f(x)dx$	Tích phân bất định (nguyên hàm) của hàm số $f(x)$
$\int_a^b f(x)dx$	Tích phân của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

Chương 1

SỐ THỰC VÀ DÃY SỐ

1.1. TẬP BỊ CHẶN

Xét tập số thực A .

Để chứng minh tập A là bị chặn và $\sup A = M$, ta có thể kiểm chứng hai điều kiện:

- $\forall x \in A, x \leq M$;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A$ sao cho $x_0 > M - \varepsilon$.

Tương tự, để chứng minh tập A bị chặn dưới và $\inf A = m$, ta có thể kiểm chứng hai điều kiện:

- $\forall x \in A, x \geq m$;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A$ sao cho $x_0 < m + \varepsilon$.

Ví dụ. Cho $A = \left\{ \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N} \text{ và } 0 < m < n \right\}$. Chứng minh:

a) Tập A là bị chặn trên và $\sup A = 1$;

b) Tập A là bị chặn dưới và $\inf A = 0$.

Lời giải.

a) + $\forall q = \frac{m}{n} \in A$, vì $0 < m < n$ nên $q < 1$

+ $\forall \varepsilon > 0$, vì $\frac{n-1}{n} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, do đó với $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ thì $\frac{n_0-1}{n_0} \in A$ và

$$\frac{n_0-1}{n_0} > 1 - \varepsilon$$

Vậy A bị chặn trên và $\sup A = 1$.

b) + $\forall q = \frac{m}{n} \in A$, vì $0 < m < n$ nên $q > 0$

+ $\forall \varepsilon > 0$, vì $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, do đó với $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 2$ thì $\frac{1}{n_0} \in A$ và

$$\frac{1}{n_0} < 0 + \varepsilon$$

Vậy A bị chặn dưới và $\inf A = 0$.

Bài tập 1.1 – 1.2.

1.2. SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA CHỨNG MINH GIỚI HẠN CỦA DÃY

Xét dãy số $\{x_n\}$. Để chứng tỏ rằng dãy x_n hội tụ về a , ta làm trỗi khoảng cách $|x_n - a|$ bởi một số c_n sao cho dãy c_n dần về 0, sau đó với mỗi số $\varepsilon > 0$, tìm một chỉ số N_0 sao cho với $n \geq N_0$ ta có $c_n < \varepsilon$.

Để chứng tỏ dãy x_n dần về $+\infty$, với mỗi $M > 0$ tìm một chỉ số N_0 sao cho $\forall n \geq N_0, x_n > M$ hoặc tìm một dãy y_n sao cho $x_n \geq y_n$ và $y_n \rightarrow +\infty$, sau đó với mỗi $M > 0$, tìm một chỉ số N_0 sao cho $\forall n \geq N_0, y_n > M$.

Tương tự, để chứng tỏ dãy x_n dần về $-\infty$, với mỗi $M > 0$ tìm một chỉ số N_0 sao cho $\forall n \geq N_0, x_n < -M$ hoặc tìm một dãy y_n sao cho $x_n \leq y_n$ và $y_n \rightarrow -\infty$, sau đó với mỗi $M > 0$, tìm một chỉ số N_0 sao cho $\forall n \geq N_0, y_n < -M$.

Ví dụ 1. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1$

Lời giải. Ta có $\left| \frac{2n-1}{2n+1} - 1 \right| = \frac{2}{2n+1} < \frac{1}{n}$ và $\forall \varepsilon > 0, \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Do đó với

mỗi $\varepsilon > 0$, nếu lấy $N_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ thì $\forall n \geq N_0, \left| \frac{2n-1}{2n+1} - 1 \right| < \varepsilon$.

Vì vậy $\frac{2n-1}{2n+1} \rightarrow 1$.

Ví dụ 2. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Lời giải.

Đặt $\alpha_n = \left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| = \sqrt[n]{n} - 1$ thì $n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^n$ nên

$n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$. Từ bất đẳng thức này suy ra $\alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

Mặt khác $\forall \varepsilon > 0, \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \Leftrightarrow n > 2\varepsilon^2 + 1$.

Do đó $\forall \varepsilon > 0$, lấy $N_0 = \left\lceil 2\varepsilon^2 + 1 \right\rceil + 1$

thì $\forall n \geq N_0, \left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| < \varepsilon$

Vì vậy $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.