

LÊ TRỌNG VINH - TỔNG ĐÌNH QUỲ
NGUYỄN THỊ THU HƯƠNG

ÔN TẬP TOÁN CAO CẤP

(XUẤT BẢN LẦN THỨ HAI, CÓ SỬA CHỮA & BỔ SUNG)

(DÙNG ÔN THI CAO HỌC KHÔI CÁC TRƯỜNG
KHOA HỌC CÔNG NGHỆ)

NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

SAu khi sinh viên khối Khoa học công nghệ (Khoa học kỹ thuật) tốt nghiệp ra trường sẽ đảm nhận những công việc khác nhau trên khắp các lĩnh vực công – nông nghiệp của Tổ quốc. Họ biết rõ công việc của bản thân đang nghiên cứu có liên quan đến các vấn đề của khoa học kỹ thuật, cần thiết phải bổ sung những kiến thức mới để hoàn thành tốt công việc cũng như phát triển hướng nghiên cứu trong chuyên môn.

Để đáp ứng được yêu cầu phát triển của xã hội, trong những năm gần đây Bộ GD & ĐT đã cho phép nhiều trường trong cả nước mở các khóa cao học đào tạo Thạc sĩ và đã tổ chức các kỳ thi tuyển theo các môn học khác nhau phù hợp với ngành đào tạo; trong các môn đó có môn “Toán học cao cấp” là môn học mà học viên gặp nhiều trở ngại vì trong công việc ít tiếp xúc với nó; do đó không biết lựa chọn một giáo trình ôn tập nào cho phù hợp với chương trình thi tuyển.

Để tạo điều kiện cho học viên, chúng tôi biên soạn cuốn “Ôn tập toán cao cấp” theo tiêu chí vừa đủ các kiến thức cơ bản để dự kỳ thi tuyển được tốt.

Tài liệu được chia làm ba phần:

1. Tóm tắt lý thuyết cơ bản.
2. Các ví dụ tính cụ thể để minh họa và hiểu rõ thêm phần lý thuyết.
3. Giới thiệu, giải một số đề thi của ĐHBK Hà Nội từ năm 2000 đến nay và giới thiệu một số đề để học viên tự luyện.

Ngoài ba phần trên, còn có phần phụ lục về Đại số tuyến tính, để giúp cho học viên một số ngành khác như kinh tế, xây dựng, mỏ địa chất, giao thông, thủy lợi,... có thêm tư liệu ôn tập; đồng thời cũng là tài liệu tham khảo của sinh viên khối chính quy tại các trường thuộc khối công nghệ. Đặc biệt đây cũng là tài liệu để sinh viên khối cao đẳng các trường nắm được kiến thức cơ bản của môn Toán học cao cấp, dễ dàng ôn tập tham dự kỳ thi chuyển hệ của các ngành.

Cuốn tài liệu này được biên soạn theo tiêu chí ôn thi cao học khối công nghệ nên chắc chắn chưa đáp ứng được đầy đủ mọi vấn đề mà bạn đọc mong muốn, cũng như những thiếu sót có thể xảy ra trong quá trình biên soạn, chúng tôi rất mong sự góp ý của bạn đọc đối với quyển sách này. Mọi ý kiến xin gửi về theo địa chỉ: Viện Toán ứng dụng và Tin học, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, số 1 Đại Cồ Việt, Hà Nội.

Các tác giả

VẤN ĐỀ TÁI BẢN LẦN THỨ HAI

Năm 2007 cuốn “Ôn tập Toán cao cấp” (dùng ôn thi cao học khối các trường khoa học công nghệ) đã đáp ứng được nhu cầu ôn tập môn Giải tích toán cho các thí sinh dự thi tuyển đầu vào cao học của trường ĐHBK Hà Nội và các trường khoa học công nghệ trong cả nước.

Gần 10 năm qua chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến hoan nghênh và góp ý của các bạn đọc, đồng thời mong muốn có thêm nhiều bài tập dạng đề thi để thí sinh tự rèn luyện thêm trong điều kiện vừa công tác vừa tự ôn tập để dự thi tuyển đầu vào của cao học.

Xuất phát từ nguyện vọng đó, trong lần tái bản này chúng tôi sửa chữa những sai sót về in ấn trong lần xuất bản trước đồng thời bổ sung thêm các đề thi của trường ĐHBK Hà Nội từ 2008 đến nay.

Chúng tôi luôn mong tiếp tục nhận được những ý kiến đóng góp, phê bình của các thí sinh để những lần xuất bản sau ngày càng hoàn thiện hơn.

Các tác giả

MỤC LỤC

Lời nói đầu	iii
--------------------	------------

Mục lục	1
----------------	----------

I ÔN TẬP LÝ THUYẾT	7
---------------------------	----------

Chương 1 Hàm số một biến số	9
------------------------------------	----------

1	Khái niệm hàm số một biến số	9
1.1	Các ký hiệu logic	9
1.2	Số thực, trị tuyệt đối của số thực	10
1.3	Hàm số	10
2	Giới hạn và liên tục	12
2.1	Giới hạn của hàm số	12
2.2	Giới hạn một phía	13
2.3	Vô cùng bé (VCB); Vô cùng lớn (VCL)	13
2.4	Các công thức tìm giới hạn	14
2.5	Sự liên tục của hàm số	16
3	Đạo hàm và vi phân	17
3.1	Đạo hàm	17
3.2	Vi phân	18
3.3	Các phép tính đạo hàm	19
3.4	Bảng công thức tính đạo hàm	19
3.5	Qui tắc L'Hospital	20

3.6	Đạo hàm và vi phân cấp cao	21
3.7	Công thức Taylor	22
4	Cực trị và khảo sát hàm số	22
4.1	Cực trị, trị lớn nhất, bé nhất của hàm số	22
4.2	Khoảng lồi, lõm của đồ thị	23
4.3	Tiệm cận	24
4.4	Sơ đồ khảo sát, vẽ đồ thị của hàm số	24
5	Tích phân bất định	25
5.1	Khái niệm và tính chất	25
5.2	Bảng tích phân bất định cơ bản	26
5.3	Các phương pháp tính tích phân bất định	26
6	Tích phân xác định	29
6.1	Công thức Newton-Leibniz	29
6.2	Các phương pháp tính tích phân xác định	29
7	Tích phân suy rộng	31
7.1	Tích phân suy rộng loại 1	31
7.2	Tích phân suy rộng loại 2	32
Chương 2 Hàm số nhiều biến số.		35
1	Khái niệm về hàm số nhiều biến số	35
1.1	Định nghĩa, miền xác định, miền giá trị	35
1.2	Giới hạn và liên tục	36
2	Đạo hàm và vi phân	36
2.1	Đạo hàm	36
2.2	Vi phân toàn phần (cấp 1)	37
2.3	Đạo hàm của hàm hợp	37
2.4	Đạo hàm và vi phân cấp cao	38
2.5	Đạo hàm của hàm ẩn	39
3	Cực trị hàm hai biến số	40
3.1	Cực trị địa phương	40

3.2	Cực trị có điều kiện	40
3.3	Trị LN, BN của hàm số trong miền kín	41
4	Tích phân hai lớp	42
4.1	Phương trình đường và mặt thường sử dụng	42
4.2	Khái niệm và tính chất của tích phân hai lớp	45
4.3	Cách tính tích phân hai lớp	46
5	Ứng dụng của tích phân hai lớp	52
5.1	Tính diện tích của miền phẳng	52
5.2	Tính diện tích mảnh mặt cong	52
5.3	Tính thể tích vật thể	53
Chương 3 Tích phân đường		55
1	Khái niệm và các tính chất	55
1.1	Khái niệm về tích phân đường loại hai	55
1.2	Các tính chất	56
2	Cách tính tích phân đường	57
3	Công thức Green, tích phân không phụ thuộc	59
3.1	Công thức Green	59
3.2	Tích phân đường không phụ thuộc đường đi	59
Chương 4 Phương trình vi phân		63
1	Phương trình vi phân cấp 1	63
1.1	Các khái niệm	63
1.2	Các dạng phương trình giải được	64
2	Phương trình vi phân cấp hai	67
2.1	Khái niệm mở đầu	67
2.2	Phương trình giảm cấp được	68
2.3	Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai	69
3	Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng	71
3.1	Dạng	71

3.2	Trường hợp về phải có dạng đặc biệt	73
3.3	Nguyên lý chồng xếp nghiệm	74
Chương 5 Chuỗi		75
1	Chuỗi số	75
1.1	Khái niệm chung về chuỗi số	75
1.2	Các tính chất của chuỗi số và điều kiện ắt có	76
1.3	Chuỗi số dương	76
1.4	Chuỗi số có dấu bất kỳ, chuỗi số đan dấu	78
2	Chuỗi hàm số	80
2.1	Khái niệm	80
2.2	Chuỗi lũy thừa	81
2.3	Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa	82
II GIẢI VÍ DỤ CÁC CHƯƠNG TƯƠNG ỨNG		85
Chương 1 Hàm số một biến số		87
1	Giới hạn hàm số	87
2	Đạo hàm và vi phân	91
3	Khảo sát hàm số	96
4	Tích phân bất định	102
5	Tích phân xác định	111
Chương 2 Hàm số nhiều biến số.		119
1	Đạo hàm và vi phân	119
2	Cực trị hàm hai biến số	133
3	Tích phân hai lớp	136
4	Ứng dụng tích phân hai lớp	147
Chương 3 Tích phân đường		153

Chương 4 Phương trình vi phân 167

- 1 Phương trình vi phân cấp một 167
- 2 Phương trình vi phân cấp hai 174
- 3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng 180

Chương 5 Chuỗi 191

- 1 Chuỗi số 191
- 2 Chuỗi hàm số 197

III GIỚI THIỆU VÀ GIẢI MỘT SỐ ĐỀ THI 209

IV PHỤ LỤC: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH 351

- 1 Ma trận, định thức 353
 - 1.1 Khái niệm về ma trận 353
 - 1.2 Các phép toán về ma trận 354
 - 1.3 Định thức, các tính chất của định thức 356
 - 1.4 Ma trận nghịch đảo 358
 - 1.5 Hạng của ma trận 358
 - 1.6 Giải phương trình ma trận 359
- 2 Hệ phương trình đại số tuyến tính 360
 - 2.1 Hệ phương trình đại số tuyến tính (đstt) 360
 - 2.2 Phương pháp giải 360
- 3 Các ví dụ minh họa 361
- 4 Các bài tập tự luyện 376

PHẦN I

ÔN TẬP LÝ THUYẾT

CHƯƠNG 1

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Trong chương này chúng ta nhắc lại một số khái niệm cần thiết của hàm số một biến số độc lập, các khái niệm và quy tắc tính đạo hàm, vi phân, tích phân,...

§1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

1.1 Các ký hiệu logic

Mệnh đề toán học là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai, không có mệnh đề vừa đúng vừa sai. Một mệnh đề thường ký hiệu bởi các chữ cái in hoa như $A, B, C, \dots$

Giả sử có hai mệnh đề A và B . Ký hiệu

$$\begin{aligned} A \implies B & \text{ từ mệnh đề } A \text{ suy ra mệnh đề } B, \\ A \iff B & \text{ mệnh đề } A \text{ tương đương với mệnh đề } B. \end{aligned}$$

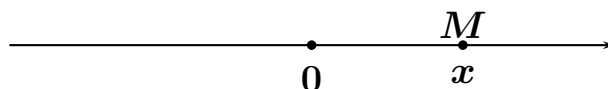
hay A là điều kiện cần và đủ để có B và ngược lại.

Ký hiệu $:=$ (có nghĩa là, hay được định nghĩa là).

$$\begin{aligned} \forall x & \text{ đọc là với mọi } x, \quad \exists y \text{ đọc là tồn tại } y, \\ \nexists y & \text{ đọc là không tồn tại } y. \end{aligned}$$

1.2 Số thực, trị tuyệt đối của số thực

Số thực bao gồm tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ, ký hiệu là $\mathbb{R}$.
Mỗi số thực x ứng với điểm M trên trục số (hình 1).



Hình 1

Khoảng $(a, b) := a < x < b$

Đoạn $[a, b] := a \leq x \leq b$

Khoảng kín bên phải $(a, b] := a < x \leq b$

Khoảng kín bên trái $[a, b) := a \leq x < b$

Khoảng vô hạn $\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty) := -\infty < x < +\infty$.

Trị tuyệt đối của số thực $x \in \mathbb{R}$, ký hiệu là $|x|$, là số không âm được xác định như sau

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta đều có

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$$

$$|x^2| = |x|^2 = x^2; \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$$

$$|x| > \alpha \iff x < -\alpha \text{ hoặc } x > \alpha.$$

1.3 Hàm số

1. Khái niệm hàm số

Xét hai tập hợp số thực X và Y , ($X \neq \emptyset$). Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ là hàm

số một biến số xác định trên tập hợp X (x là biến số độc lập, $y = f(x)$ là biến số phụ thuộc), nhận giá trị trên tập hợp Y .

Tập hợp X là miền xác định (MXD) của hàm số $y = f(x)$.

Tập hợp

$$f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), \forall x \in X\}$$

gọi là miền giá trị (MGT) của hàm số f .

- Hàm số $f(x)$ gọi là tăng (hay đồng biến) trong khoảng (a, b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b); x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.

Còn nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b); x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ thì $f(x)$ gọi là tăng ngặt trong khoảng (a, b) .

Nếu $\forall x_1, x_2 \in (a, b); x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$ thì ta nói hàm số $f(x)$ giảm (hay nghịch biến) trong khoảng (a, b) ; tương tự $f(x_1) > f(x_2)$ gọi là giảm ngặt.

Hàm số $f(x)$ chỉ tăng hoặc giảm trong khoảng (a, b) gọi chung là hàm số đơn điệu.

- Hàm số xác định trong khoảng $(-a, a)$ gọi là hàm số chẵn nếu $f(-x) = f(x)$, còn nếu $f(-x) = -f(x)$ thì gọi là hàm số lẻ trong khoảng đó.
- Hàm số $f(x)$ gọi là hàm tuần hoàn, nếu tồn tại số thực $T \neq 0$ sao cho

$$f(x + T) = f(x), \forall x, x + T \in \text{MXD}. (*)$$

Số $T > 0$ nhỏ nhất để $(*)$ thỏa mãn gọi là chu kỳ cơ sở của hàm số.

Về mặt đồ thị: hàm số chẵn, đồ thị đối xứng qua trục tung (Oy); hàm số lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ $(0, 0)$. Hàm số tuần hoàn có đồ thị lặp lại sau mỗi chu kỳ T .

2. Hàm số hợp, hàm số ngược

Giả sử $y = f(u)$ là hàm số của biến số u , đồng thời $u = g(x)$ là hàm số của biến số x . Khi đó hàm số $y = f(u) = f[g(x)]$ là hàm

hợp của biến số độc lập x thông qua biến số trung gian u ; ký hiệu $(f \circ g)x = f[g(x)]$.

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số xác định, đơn điệu trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ (f là song ánh từ $X \rightarrow Y$). Như vậy mỗi $x \in X$ cho ta một và chỉ một phần tử $y \in Y$ và ngược lại mỗi $y \in Y$ cho ta một phần tử $x \in X$, phần tử x được xác định như vậy gọi là hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$, ký hiệu $x = f^{-1}(y)$.

Vậy từ

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \quad (*)$$

(với điều kiện f là song ánh từ $X \rightarrow Y$).

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ không thay đổi (cùng chung một đồ thị). Thông thường ta vẫn gọi y là hàm số, x là đối số, trong (*) đổi vai trò của x và y ta được $y = f^{-1}(x)$ cũng gọi là hàm ngược của hàm số $y = f(x)$; nhưng đồ thị của $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất ($y = x$).

Chẳng hạn hàm số $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$) có hàm ngược

$$y = \log_a x, \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1).$$

Hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $|y| \leq 1$ có hàm ngược

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad |x| \leq 1.$$

Hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ có hàm ngược

$$y = \arctan x, \arccot x.$$

§2. GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC

2.1 Giới hạn của hàm số

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập $E \subset \mathbb{R}$ hoặc $E \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}$.

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow a$ (L, a hữu hạn), ký hiệu

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tương tự ta cũng có với trường hợp $x \rightarrow \infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ đủ lớn} : |x| > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

ký hiệu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

Trường hợp a hữu hạn, L vô hạn

$$\forall A > 0, \exists \delta(A) > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > A,$$

ký hiệu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Trường hợp cả a và L là vô hạn

$$\forall A > 0, \text{ đủ lớn}, \exists M > 0 \text{ đủ lớn} : |x| > M \implies |f(x)| > A,$$

ký hiệu $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

2.2 Giới hạn một phía

Nếu $\forall x < b; x \rightarrow b$ ta viết $x \rightarrow b - 0$, còn $\forall x > a; x \rightarrow a$ ta viết $x \rightarrow a + 0$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b-0)$ tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên trái tại điểm b .

Nếu $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ tồn tại hữu hạn, ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải tại điểm a .

2.3 Vô cùng bé (VCB); Vô cùng lớn (VCL)

Hàm số $\alpha(x)$ gọi là VCB khi $x \rightarrow a$ nếu $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, (a có thể hữu hạn hoặc vô hạn).

Hàm số $F(x)$ gọi là VCL khi $x \rightarrow a$ (hữu hạn hoặc vô hạn) nếu $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty$.

Dễ thấy:

- Nghịch đảo của VCL là VCB khi $x \rightarrow a$.

- Tổng và tích hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình là VCB trong quá trình đó.
- Tích các VCB và đại lượng giới nội là VCB.

So sánh các VCB:

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB trong cùng một quá trình $x \rightarrow a$, khi đó

- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, ($C \neq 0, 1, \infty$) thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc khi $x \rightarrow a$.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ khi $x \rightarrow a$.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, thì ta nói $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x \rightarrow a$.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, thì ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB tương đương khi $x \rightarrow a$. Trong trường hợp này ta ký hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \rightarrow a$.

2.4 Các công thức tìm giới hạn

1. Các phép toán về giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C, \quad (C = \text{const})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (g(x) \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0).$$

2. Các công thức về giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Khi } a = 1 \text{ ta có } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828 \dots$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= 1 \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= 1 \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1 \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} &= p, \quad (p > 0).
\end{aligned}$$

3. Các VCB tương đương

Nếu $\alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$) thì cũng trong quá trình này ta có

$$\begin{aligned}
\sin \alpha(x) &\sim \alpha(x); & e^{\alpha(x)} - 1 &\sim \alpha(x); \\
\tan \alpha(x) &\sim \alpha(x); & \ln(1 + \alpha(x)) &\sim \alpha(x); \\
\arcsin \alpha(x) &\sim \alpha(x); & (1 + \alpha(x))^p - 1 &\sim p \cdot \alpha(x) \quad (p > 0); \\
\arctan \alpha(x) &\sim \alpha(x).
\end{aligned}$$

4. Các qui tắc khử các dạng bất định

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}; \quad 1^\infty, \infty^0, 0^\infty, 0^0.$$

Các dạng bất định $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}$ đều có thể đưa được về dạng $\frac{0}{0}$.

Các dạng $1^\infty, \infty^0, 0^\infty, 0^0$ cũng được đưa về dạng $\frac{0}{0}$ bằng công thức sau

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} v(x) \cdot \ln u(x)};$$

từ đó ta đưa về dạng $\frac{0}{0}$.

(a) Nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow a$ và $\alpha(x) \sim \tilde{\alpha}(x); \beta(x) \sim \tilde{\beta}(x)$ khi $x \rightarrow a$ thì ta có

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}.$$

(b) Qui tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao, VCL bậc thấp trong một tổng (tổng đại số).

Nếu $\alpha_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, là các VCB khi $x \rightarrow a$, trong đó $\alpha_1(x)$ là VCB bậc thấp nhất thì

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \sim \alpha_1(x) \text{ khi } x \rightarrow a.$$

Ngược lại:

Nếu $f_1(x)$ là VCL có bậc cao nhất còn $f_2(x), \dots, f_n(x)$ là các VCL bậc thấp hơn khi $x \rightarrow a$ thì

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \sim f_1(x) \text{ khi } x \rightarrow a.$$

2.5 Sự liên tục của hàm số

Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x = x_o$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o).$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) thì ta nói hàm số liên tục trong khoảng đó.

Hàm số $f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trong khoảng (a, b) và liên tục bên phải tại điểm a : $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$ và liên tục bên trái tại b : $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b-0)$.

Như vậy điều kiện để hàm $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_o$ là

$$\lim_{x \rightarrow x_o+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_o-0} f(x) = f(x_o).$$

Nếu hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x = x_o$ thì ta nói hàm số gián đoạn tại điểm đó.

Nếu $f(x_o+0) \neq f(x_o-0)$ và đều là hữu hạn thì ta nói hàm số $f(x)$ gián đoạn loại 1 tại điểm $x = x_o$ và

$$|f(x_o+0) - f(x_o-0)| = \lambda$$

gọi là bước nhảy.

Nếu $f(x_o + 0) = f(x_o - 0) \neq f(x_o)$ thì điểm x_o gọi là điểm cô lập.

Nếu $\nexists f(x_o)$ và có $f(x_o + 0) = f(x_o - 0)$ thì ta gọi x_o là điểm gián đoạn bỏ được.

Nếu một trong hai giới hạn trái, giới hạn phải tại điểm x_o , hoặc cả hai giới hạn đó ra vô hạn thì điểm x_o gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_o$, hàm số $z = g(y)$ liên tục tại điểm $y_o = f(x_o)$ thì hàm số $z = g(f(x))$ liên tục tại điểm $x = x_o$.

Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì

- (i) $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$,
- (ii) $f(x)$ đạt giá trị bé nhất m và trị lớn nhất M trên $[a, b]$.
- (iii) Nếu $f(x)$ đạt trị lớn nhất M và bé nhất m đồng thời

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \quad (a \leq \alpha < \beta \leq b)$$

thì tồn tại điểm $c \in (\alpha, \beta)$ để $f(c) = 0$ và c chính là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

§3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

3.1 Đạo hàm

Giả sử $f(x)$ xác định trong (a, b) , lấy điểm $x_o \in (a, b)$, cho x_o một số gia Δx ta được điểm $x_o + \Delta x \in (a, b)$.

Gọi $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$ là số gia của hàm số $f(x)$ tại điểm x_o .

Nếu giới hạn

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

tồn tại hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_o , ký hiệu

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{hay} \quad y'(x_o) = f'(x_o).$$

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói hàm số có đạo hàm trong khoảng đó.

Về mặt hình học: $f'(x_o)$ bằng hệ số góc k của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại điểm $(x_o, f(x_o))$

$$f'(x_o) = k = \tan \alpha.$$

Nếu tồn tại

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = f'(x_o + 0)$$

thì ta nói hàm số có đạo hàm bên phải tại điểm x_o .

Tương tự ta cũng có

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = f'(x_o - 0)$$

gọi là đạo hàm bên trái tại điểm x_o . Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_o thì $f'(x_o + 0) = f'(x_o - 0) = f'(x_o)$ và hàm số liên tục tại điểm x_o .

3.2 Vi phân

Nếu số gia Δy của hàm số $y = f(x)$ viết được dưới dạng

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

trong đó A là hằng số chỉ phụ thuộc x , không phụ thuộc Δx , còn α là VCB khi $\Delta x \rightarrow 0$; thì đại lượng $A \cdot \Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x ; ký hiệu $dy = A \cdot \Delta x$.

Người ta đã chứng minh rằng $A = f'(x)$, và khi $y = x$ thì $dy = dx$ nên

$$dy = f'(x)dx$$

là công thức tính vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x . Khi đó ta cũng nói hàm số khả vi tại điểm x (có đạo hàm tại điểm x).

3.3 Các phép tính đạo hàm

Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là những hàm số có đạo hàm thì

$$y = u \pm v \implies y' = u' \pm v'$$

$$y = C \quad (C - \text{const}) \implies y' = C' = 0$$

$$y = u.v \implies y' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$y = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0) \implies y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y = \frac{C}{v} \quad (C - \text{const}, v \neq 0) \implies y' = \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2} \cdot v'$$

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x , hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f(u) = f[g(x)]$ cũng có đạo hàm theo x và

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x).$$

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm theo x , $f'(x) \neq 0$, và nếu tồn tại hàm ngược $x = \varphi(y)$, thì hàm số $x = \varphi(y)$ cũng có đạo hàm tại điểm $y = f(x)$ và ta có

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

3.4 Bảng công thức tính đạo hàm

Nếu $u = x$ (x là biến độc lập) thì $u' = 1$; còn nếu $u = u(x)$ ta có các công thức sau

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u';$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \quad (a > 0, a \neq 1);$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' \quad (a > 0, a \neq 1)$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$	$(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$	$(\operatorname{arccot} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Nếu $y = u^v$, $u = u(x) > 0, u \neq 1, v = v(x)$ ta lấy logarit hai vế và sử dụng công thức đạo hàm hàm hợp

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \Rightarrow y' = u^v \left[v' \ln u + \frac{v}{u} \cdot u' \right].$$

Chú ý 1.1. Nếu $y = f[u(x)]$ thì

$$dy = f' \cdot u'(x) dx; \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad u'(x) dx = du$$

nên $df = f' du$; ta có các công thức vi phân tương ứng.

3.5 Qui tắc L'Hospital

Qui tắc này dùng để khử dạng bất định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ khi tìm giới hạn. Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$) và là những hàm khả vi tại $x = a$ thì

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}. \quad (*)$$

Công thức (*) cũng đúng khi có dạng $\frac{\infty}{\infty}$, và là điều kiện đủ, nghĩa là giới hạn vế phải của (*) không tồn tại thì giới hạn vế trái có thể có cũng có thể không (khi đó phải tìm theo cách khác).

Ngoài ra qui tắc trên có thể được thực hiện một số hữu hạn lần.