

LỜI MỞ ĐẦU

Cuốn sách “*Đại số tuyến tính*” được biên soạn nhằm đáp ứng đòi hỏi ngày càng cao về chất lượng dạy và học môn Đại số tuyến tính ở bậc Đại học. Nội dung cuốn sách gồm năm chương:

Chương 1 trình bày về tập hợp, quan hệ và ánh xạ.

Chương 2 trình bày phép toán và sơ lược các cấu trúc nhóm, vành, trường, xây dựng trường số phức và mở đầu lý thuyết không gian vector.

Chương 3 tập trung vào các vấn đề về ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính.

Chương 4 đề cập đến ma trận của một hệ vector và ma trận chuyển cơ sở trong không gian hữu hạn chiều. Tiếp đó trình bày ánh xạ tuyến tính, trị riêng, vector riêng và vấn đề chéo hóa ma trận.

Chương 5 trình bày khái niệm về các dạng song tuyến tính, dạng toàn phương và các phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc. Xây dựng các khái niệm tích vô hướng, hệ trục giao, không gian Euclide và ứng dụng vào hình học giải tích.

Với việc trình bày chặt chẽ, trực quan, cùng hệ thống ví dụ minh họa và bài tập phong phú, chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách sẽ đáp ứng nhiều đối tượng bạn đọc ở trình độ khác nhau. Đặc biệt nhằm giúp các bạn sinh viên tự học tốt môn Đại số ở năm thứ nhất, trong chứng minh của nhiều định lý, chúng tôi đã đưa ra các giải pháp khác nhau nhằm đáp ứng cách tư duy phong phú của nhiều bạn đọc. Bạn đọc hoàn toàn có thể tiếp cận lý thuyết và lựa chọn hệ thống bài tập phù hợp với khả năng của mình. Các bài tập có đánh dấu “*” được xem là những bài tập khó, để giải được đòi hỏi phải hiểu biết sâu sắc lý thuyết. Cũng cần lưu ý rằng, trong nhiều phần của cuốn sách, các đối tượng tuy được xem xét trên một trường bất kỳ nhưng nếu bạn đọc chưa quen với khái niệm trường thì có thể xem nó như tập số thực hoặc số phức.

Cuốn sách có thể được sử dụng làm tài liệu giảng dạy, học tập cho sinh viên hệ chính quy cũng như hệ đào tạo kỹ sư chuyên ngành của các trường đại học thuộc khối kỹ thuật hoặc kinh tế nói chung và Trường Đại học Bách khoa Hà Nội nói riêng.

Với cách trình bày hòa quyện giữa cụ thể và trừu tượng, giữa cô đọng và diễn giải, chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách này cũng còn là tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên các ngành Toán, Toán – Tin của các trường đại học thuộc khối Khoa học cơ bản, của các kỹ sư cũng như những người giảng dạy Đại số tuyến tính.

Các tác giả chân thành cảm ơn TS. Trần Việt Dũng, người đã đọc bản thảo một cách tường tận và đã đóng góp những ý kiến bổ ích. Mặc dù đã được biên soạn công phu, xong cuốn sách không thể tránh khỏi thiếu sót, các tác giả rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Các tác giả

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU	3
Chương 1. TẬP HỢP, QUAN HỆ VÀ ÁNH XẠ.....	9
§1. Tập hợp	9
1. Tập hợp và phần tử của một tập hợp.....	9
2. Tập con và hai tập bằng nhau	10
3. Các phép toán trên các tập hợp	10
4. Tích Descartes của các tập hợp.....	12
Bài tập	13
§2. Quan hệ	14
1. Quan hệ hai ngôi	14
2. Một vài thuật ngữ.....	15
3. Quan hệ tương đương	15
4. Quan hệ thứ tự	16
Bài tập	16
§3. Ánh xạ	17
1. Định nghĩa ánh xạ.....	17
2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh.....	18
3. Tích ánh xạ, ánh xạ ngược và ánh xạ thu hẹp	18
Bài tập	20
Chương 2. PHÉP TOÁN VÀ MỘT VÀI CẤU TRÚC ĐẠI SỐ.....	22
§1. Phép toán.....	22
1. Khái niệm phép toán	22
2. Một vài khái niệm đi kèm với phép toán	23
Bài tập	23
§2. Nhóm	24
Bài tập	26

§3. Vành và trường.....	27
Bài tập	28
§4. Trường số phức	29
1. Xây dựng trường số phức	30
2. Số phức liên hợp và môđun của số phức	31
3. Nhân, chia và khai căn số phức.....	32
4. Phân tích đa thức với hệ số thực ra thừa số.....	33
Bài tập	34
§5. Không gian vector.....	36
1. Khái niệm không gian vector	36
2. Không gian vector con	38
3. Cơ sở của một không gian vector.....	39
4. Hạng của một hệ vector.....	43
Bài tập	43
Chương 3. MA TRẬN, ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH....	46
§1. Ma trận.....	46
1. Định nghĩa và các khái niệm.....	46
2. Ma trận bằng nhau và ma trận chuyển vị	48
§2. Các phép toán trên ma trận	49
1. Phép nhân một số với ma trận.....	49
2. Cộng hai ma trận cùng cỡ	49
3. Phép nhân hai ma trận.....	50
4. Ma trận nghịch đảo	52
Bài tập	53
§3. Định thức.....	55
1. Hoán vị và phép thế	55
2. Định thức cấp n	58
3. Tính chất của định thức.....	59
4. Định lý Laplace.....	66
5. Xác định ma trận nghịch đảo của ma trận không suy biến	71
Bài tập	74

6. Hạng của ma trận	77
Bài tập	80
§4. Hệ phương trình tuyến tính.....	80
1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính	80
2. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.....	83
3. Cách giải hệ phương trình tuyến tính.....	84
4. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát	88
Bài tập	92
Chương 4. ẢNH XẠ TUYẾN TÍNH	95
§1. Ma trận của hệ vectơ trong không gian hữu hạn chiều	95
1. Tọa độ vectơ theo một cơ sở.....	96
2. Ma trận của hệ vectơ theo một cơ sở	97
3. Ma trận chuyển cơ sở.....	99
Bài tập	101
§2. Ánh xạ tuyến tính	102
1. Định nghĩa và các ví dụ	102
2. Đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu	104
3. Hạt nhân, ảnh và hạng của một ánh xạ tuyến tính	104
Bài tập	107
§3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính	108
1. Định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính	108
2. Ma trận của toán tử tuyến tính theo một cơ sở.....	111
Bài tập	114
§4. Trị riêng và vectơ riêng của một toán tử tuyến tính	115
1. Trị riêng và vectơ riêng.....	115
2. Không gian con bất biến ứng với trị riêng của một toán tử tuyến tính.....	117
Bài tập	118
§5. Bài toán tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều	119
1. Phương trình đặc trưng	119
2. Thuật toán tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính.....	121
Bài tập	123

§6. Bài toán chéo hóa ma trận.....	124
1. Tiêu chuẩn để một ma trận chéo hóa được	124
2. Thuật toán chéo hóa ma trận.....	125
Bài tập	127
Chương 5. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH, TÍCH VÔ HƯỚNG	
 VÀ KHÔNG GIAN EUCLIDE.....	129
§1. Dạng song tuyến tính trong không gian vector thực.....	129
1. Định nghĩa dạng song tuyến tính	129
2. Phương pháp Lagrange	133
3. Phương pháp Jacobi và tiêu chuẩn Sylvester	136
Bài tập	142
§2. Không gian Euclide	143
1. Tích vô hướng và không gian Euclide	143
Bài tập	150
2. Phép biến đổi trực giao	151
Bài tập	153
3. Toán tử đối xứng.....	153
Bài tập	158
4. Liên hệ với bài toán đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc với bài toán chéo hóa trực giao ma trận đối xứng	158
§3. Không gian hình học Euclide	161
1. Siêu phẳng và đường thẳng.....	162
2. Mặt bậc hai.....	163
3. Đưa phương trình mặt bậc hai về dạng chính tắc.....	165
4. Đưa mặt bậc hai về dạng chính tắc trong không gian hình học Euclide	168
5. Phân loại đường bậc hai trong mặt phẳng.....	171
6. Phân loại mặt bậc hai trong không gian	172
Bài tập	176
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	179

Chương 1

TẬP HỢP, QUAN HỆ VÀ ÁNH XẠ

Tập hợp, quan hệ và ánh xạ là vật liệu và công cụ cơ bản để xây dựng nên hầu hết các đối tượng toán học. Trong chương trình này chúng tôi chủ trương trình bày các khái niệm này một cách đơn giản và thiết thực, nhằm phục vụ bạn đọc mới làm quen với toán học cao cấp.

§1. TẬP HỢP

1. Tập hợp và phần tử của một tập hợp

Tập hợp và *phần tử* của một tập hợp được coi là các đối tượng cơ bản, còn phần tử *thuộc* ($\in$) tập hợp được coi là tương quan cơ bản. Các đối tượng cơ bản và tương quan cơ bản tuy không được định nghĩa, nhưng chúng được thể hiện rõ qua các ví dụ cụ thể.

Cho một tập hợp có nghĩa là cho một lệnh nhằm “tụ tập” các vật nào đó. Chẳng hạn: cho tập hợp các số tự nhiên N ta hiểu đó là tập các số nguyên dương, tập các số nguyên Z , tập các số hữu tỷ Q , tập các số thực R , tập các công dân nam trong một tỉnh nào đó...

Các vật của tập A được gọi là các phần tử của A . Nếu a là phần tử của tập A thì ta viết là $a \in A$, phủ định của thuộc là không thuộc, b không phải là phần tử của A thì viết là $b \notin A$, đọc là b không thuộc A .

Nếu tập A gồm các phần tử $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì ta ký hiệu:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Trường hợp A là một tập mà toàn bộ các phần tử của nó thỏa mãn một tính chất P nào đó thì ta viết:

$$A = \{a \mid a \text{ có tính chất } P\}.$$

Trường hợp B là tập cho trước, A là tập gồm các phần tử của B thỏa mãn tính chất P thì viết là:

$$A = \{a \in B \mid a \text{ có tính chất } P\}.$$

Ví dụ: Tập các nghiệm thực của phương trình $f(x) = 0$ là $\{a \in R \mid f(a) = 0\}$; tập các nghiệm nguyên của bất phương trình $f(x) \leq 0$ là $\{a \in Z \mid f(a) \leq 0\}$; tập các điểm

nằm trên đường thẳng $ax + by + c = 0$ của mặt phẳng tọa độ Oxy là $\{M(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$.

Tập không có phần tử nào được gọi là tập rỗng và ký hiệu là $\emptyset$, chẳng hạn:
 $\{a \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$, $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 2\} = \emptyset$. Một chân lý hiển nhiên hay được nhắc tới là: “Tập các đối tượng thỏa mãn mọi tính chất cũng là một tập rỗng”.

2. Tập con và hai tập bằng nhau

Định nghĩa 1.1. Tập A khác rỗng được gọi là tập con của tập B và ký hiệu là $A \subset B$ nếu như mọi phần tử của A đều là phần tử của B . Khi A là tập con của B ta cũng có thể viết là $B \supset A$.

Quy ước: Tập $\emptyset$ được coi là tập con của mọi tập hợp.

Ví dụ:

(i) $N \subset Z \subset Q \subset R$.

(ii) Tập các điểm của đường thẳng trong mặt phẳng là tập con của tập các điểm của mặt phẳng đó.

Lưu ý: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ thì a_1 là phần tử của A , có nghĩa là $a_1 \in A$ còn $\{a_1\}$ là một tập con của A tức là $\{a_1\} \subset A$ và nếu viết $a_1 \subset A$ hoặc $\{a_1\} \in A$ thì đều sai.

Định nghĩa 1.2. Hai tập A và B được gọi là bằng nhau nếu A là tập con của B đồng thời B cũng là tập con của A .

Nhận xét:

Để chứng minh $A \subset B$, ta cần chỉ ra rằng, với mọi $a \in A$ thì $a \in B$ hoặc với mọi $x \notin B$ thì $x \notin A$.

Để chứng minh hai tập bằng nhau $A = B$, ta cần chứng minh $A \subset B$ và $B \subset A$ hoặc cần chứng minh $x \in A$ khi và chỉ khi $x \in B$.

3. Các phép toán trên các tập hợp

Giả sử A và B là hai tập hợp cho trước thì:

Phép hợp: $A \cup B$ đọc là A hợp B là một tập hợp mà các phần tử của nó hoặc thuộc A hoặc thuộc B , ta viết:

$$A \cup B = \left\{ x \mid \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \right\}.$$

Phép giao: $A \cap B$ đọc là A giao B là một tập hợp gồm những phần tử đồng thời thuộc A và thuộc B :

$$A \cap B = \left\{ x \mid \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \right\}$$

Hai tập hợp có giao bằng $\emptyset$ được gọi là hai tập hợp rời nhau.

Phép trừ: $A \setminus B$ đọc là A trừ B là một tập hợp gồm những phần tử thuộc A nhưng không thuộc B .

$$A \setminus B = \left\{ x \mid \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \right\}.$$

Hiệu đối xứng: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ đọc là hiệu đối xứng của tập A và tập B .

Định lý 1.3. Với A, B, C, D là các tập tùy ý cho trước, ta có các đẳng thức sau đây:

- (i) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A, A \Delta B = B \Delta A.$
- (ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$
 $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$
- (iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
- (iv) Các công thức De Morgan
 $D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B),$
 $D \setminus (A \cap B) = (D \setminus A) \cup (D \setminus B).$

Chứng minh: Sau đây sẽ chứng minh một đẳng thức đại diện, còn các đẳng thức khác bạn có thể chứng minh như các bài tập.

Chẳng hạn cần chứng minh đẳng thức $D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B)$ ta cần chứng minh hai bao hàm thức sau:

$$D \setminus (A \cup B) \subset (D \setminus A) \cap (D \setminus B) \quad (1)$$

$$(D \setminus A) \cap (D \setminus B) \subset D \setminus (A \cup B) \quad (2)$$

Trước hết ta chứng minh bao hàm thức (1).

Lấy a là một phần tử bất kỳ của tập $D \setminus (A \cup B)$. Theo định nghĩa của hiệu, ta có $a \in D$ và $a \notin (A \cup B)$, nghĩa là $a \in D$ và đồng thời $a \notin A$ và $a \notin B$. Từ $a \in D$ và $a \notin A$ kéo theo $a \in D \setminus A$, $a \in D$ và $a \notin B$ kéo theo $a \in D \setminus B$; như vậy là $a \in (D \setminus A) \cap (D \setminus B)$. Ta nhận được (1).

Tiếp theo ta chứng minh bao hàm thức (2).

Lấy b là một phần tử bất kỳ của tập $(D \setminus A) \cap (D \setminus B)$. Theo định nghĩa của giao thì $b \in (D \setminus A)$ và $b \in (D \setminus B)$. Cụ thể hơn là $b \in D$ và đồng thời $b \notin A$ và $b \notin B$. Mặt khác $b \notin A$ và $b \notin B$ thì $b \notin (A \cup B)$. Từ những điều trên suy ra $b \in D \setminus (A \cup B)$ và (2) được chứng minh.

Chú ý: Ta cũng có thể trình bày vắn tắt như sau:

$$\begin{aligned}
D \setminus (A \cup B) &= \left\{ x \mid \begin{cases} x \in D \\ x \notin A \cup B \end{cases} \right\} = \left\{ x \mid \begin{cases} x \in D \\ x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \right\} = \left\{ x \mid \begin{cases} x \in D \\ x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \right\} = \\
&= \left\{ x \mid \begin{cases} x \in D \setminus A \\ x \in D \setminus B \end{cases} \right\} = (D \setminus A) \cap (D \setminus B).
\end{aligned}$$

4. Tích Descartes của các tập hợp

Hai bộ bằng nhau: $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ nếu và chỉ nếu $n = m$ và đồng thời $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Định nghĩa 1.4. Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập cho trước, ta có thể xây dựng một tập mới $C = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$ như sau:

- (i) $C = \emptyset$ nếu một trong các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ là $\emptyset$.
- (ii) $C = A_1$ nếu $n = 1$.
- (iii) $C = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ với } i = 1, 2, \dots, n\}$ nếu $n > 1$ và các $A_i \neq \emptyset$.

Tập C khi đó được gọi là tích Descartes của n tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ theo trật tự trên. Trường hợp đặc biệt khi các tập bằng nhau $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ ta có thể viết gọn là $C = A^n$.

Ví dụ:

- (i) Cho $A = \{a, b, c\}$ và $B = \{x, y\}$ thì:

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\},$$

$$B \times A = \{(x, a), (y, a), (x, b), (y, b), (x, c), (y, c)\}.$$

Nhận xét: Khi A, B khác nhau và khác rỗng thì $A \times B \neq B \times A$, điều này nói lên rằng: tích Descartes của hai tập hợp nói chung là không có tính chất giao hoán.

- (ii) Gọi R là tập số thực thì $R^n = \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ lần}}$ được gọi là không gian thực n chiều.

(iii) Cho $A = [a, b], B = [c, d]$ là các đoạn thẳng, tích Descartes $A \times B$ biểu thị tập điểm của hình chữ nhật trong mặt phẳng tọa độ xOy (hình 1.1a).

(iv) Cho A là tập điểm của hình tròn thuộc mặt phẳng Oxy , B là tập điểm của đoạn $[0, h]$ của trục Oz trong hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ thì $A \times B$ biểu thị tập điểm của khối trụ có chiều cao h và đáy là hình tròn A (hình 1.1b).